



俞昌铭 著  
Yu Changming

# 多孔材料传热传质 及其数值分析

**Numerical Analysis of Heat and Mass Transfer for Porous Materials  
(A Theory of Drying)**

清华大学出版社

ISBN 978-7-302-25666-3



9 787302 256663 >

定价：49.00元



俞昌铭 著

Yu Changming

# 多孔材料传热传质 及其数值分析

**Numerical Analysis of Heat and Mass Transfer for Porous Materials  
(A Theory of Drying)**

清华大学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书以木材、谷物、化工及建筑材料干燥原理为工程背景,将材料科学、工程热物理、计算机技术三者有机结合。全书共6章。第1章概述,介绍多孔材料分类,多孔材料传热传质数值分析的历史、研究内容与研究方法;第2章为固体材料加热;第3章静止水加热及表面蒸发。前3章是多孔材料在热环境中被加热与干燥的理论基础。第4章为固气多孔材料加热及渗流,结合闭孔材料介绍等效导热系数,以达西定律为基础介绍等温与非等温渗流;第5章为含水非吸湿性多孔材料加热及水分迁移,介绍液体表面性质及毛细管现象,液相水(自由水)在多孔材料内的渗流与扩散;第6章为含水吸湿性多孔材料加热及水分迁移,介绍固体表面吸附现象,环境湿空气相对湿度与材料平衡含水率的等温吸附线,以及木材干燥基本原理。全书每一章节都在分析讲解之后给出算例,显示算例结果,详尽解释结果的物理含义,以便帮助读者掌握求解同类问题的方法并用以解决实际问题。

本书适合高等院校的材料科学、能源动力、农业、建筑、机械、化工、环境保护及航空航天类专业高年级本科生及研究生教学用书,也可供科研单位与工矿企业科技人员自学和参考使用。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

## 图书在版编目(CIP)数据

多孔材料传热传质及其数值分析/俞昌铭著. --北京:清华大学出版社,2011.6  
ISBN 978-7-302-25666-3

I. ①多… II. ①俞… III. ①多孔性材料—传热传质学—研究 IV. ①TB39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 102847 号

责任编辑:宋成斌

责任校对:刘玉霞

责任印制:王秀菊

出版发行:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机:010-62770175

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

邮 购:010-62786544

印 装 者:三河市春园印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170×240

印 张:23

字 数:432 千字

版 次:2011 年 6 月第 1 版

印 次:2011 年 6 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:49.00 元

产品编号:041427-01

# 序

当前我们面临的是世界性能源短缺的时代。各种能源的利用约有 80% 需经历热量或质量的传递过程，而与多孔材料中传热传质过程密切相关的建材、干燥等行业则属于高耗能工业，因此，深入理解和优化多孔材料中传热传质过程对我国的节能减排有重要意义。

《多孔材料传热传质及其数值分析》是作者俞昌铭教授近 50 年来在国内外从事教学和科研实践的精心总结，它与现有的有关多孔介质中传热传质过程的书籍的最大不同之处是：后者的研究中更多关心的是孔隙中流体相的行为，重点是流体的流动与传热，而对固相本身的性质以及流体与固体骨架相互影响关注甚少；而在本书讲解的多孔材料（如木材、谷物、动物骨骼等）中，流体也存在于固相内。存在于固相骨架间孔隙内的水称自由水（free water），存在于固相骨架内的水称吸着水（bound water）。由于它们在存在形式与迁移行为方面都有很大区别，相应的数学描述和分析方法就有很大差异。因此，与多孔介质中的传热传质研究相比，多孔材料传热传质研究不仅在理论上更全面和更科学，更重要的是它具有更广泛的工程领域的应用。

本书内容的重要特点是：充分体现了学科的交叉性。多孔材料传热传质数值分析是以多孔材料为研究对象，以传热传质过程为研究内容，以数值分析为研究方法，所以它是材料学科（多孔材料的物理化学性质、孔隙的结构与分布）、工程热物理学科（热量传递与质量迁移规律）和计算机学科（计算方法与程序设计及其应用）三者的有机结合。多孔材料结构的多样性以及其中流体流动和传递现象的复杂性，要求研究复杂结构中传热传质同时存在时的传递规律，因此，这已不仅仅是一般意义上的学科交叉，而是通过学科交叉促进了工程热物理学科的发展。

本书便于读者自学和易于掌握。章节的安排不仅遵循由浅入深、循序渐进的认识规律，而且把多孔材料传热传质这种综合复杂现象以及相应数学求解中的难点进行了分解，并将其分散到各个章节中予以解决。本书没有大量引述文献以及介绍相关的各式各样数学模型，而是针对不同研究对象，从基本现象出发，

构建物理模型，建立数值求解数学模型，最后以实例显示结果来认识 and 解决问题。本书所讲解的过程是一个没有脱节和没有跳跃的完整过程。还需要强调的是，本书内容安排中还隐含着严密的逻辑性。例如，第 2 章（固体材料加热）和第 3 章（静止水加热及表面蒸发）不是一般基础知识介绍，它们是理解第 6 章（含水吸湿性多孔材料加热及水分迁移）综合现象所必须具备的知识内容，具有很好的针对性。又如第 4 章和第 5 章是第 6 章提炼出来的基本现象，这样的编排使全书成为各部分互相支撑又具有层次性的统一体。这样的写作风格继承和发展了王补宣先生 1981 年为俞昌铭教授的著作《热传导及其数值分析》一书作序中所述的“内容精练，注意思维逻辑，突出分析问题的基本思路”。

《多孔材料传热传质及其数值分析》为材料学科的高校师生与科研、企业科技人员提供了一本教学和科研参考用书。我相信，对于不同专业的读者会有不同方面的收获，粗读和细读会有不同程度的收获，读一遍和读多遍会有不同层次的收获，但是有一点相同，那就是：只要你读，就一定有收获。

过增元

2011 年 1 月于清华大学



# 前

# 言

《多孔材料传热传质及其数值分析》(Numerical Analysis of Heat and Mass Transfer for Porous Materials) 主要以如下三个学科作为基础,或者说,它植根于这三个学科的集合处。

第一,材料科学。多孔材料是固体材料大家庭中的重要成员。由于多孔材料中存在孔隙,使其与一般固体材料有重要区别。多孔材料中诸多因素,如固相骨架的化学组成及物理性质、孔隙的结构及孔隙率的分布、孔隙内流体相所处状态,以及这些因素在材料加工过程中的变化都直接影响材料的宏观性质及材料成为成品后的质量。本书将以泡沫塑料、砂土、木材(自然材料或集成复合)等作为典型多孔材(物)料进行分析。其中木材作为一种有机生物多孔材料,无论其固相骨架还是孔隙结构,以及水分存在形式都较为复杂,因此,对它的分析实际上涵盖了广泛的多孔材料。

第二,工程热物理学。多孔材料无论其处于原始状态还是被加工或使用过程中,无论是其内部还是它与环境之间总是伴随着热量传递与质量(如水、水蒸气、空气等)迁移等综合现象。对这种综合现象的研究涉及工程热物理领域诸多分支学科。材料内部的热传导、孔隙间流体渗流的热对流、液相水蒸发与气相水蒸气凝结的相变传热等属于传热学范畴;材料内部及材料与环境之间的水、水蒸气以及空气质量扩散与对流属于流体力学与传质学范畴;材料内气体状态变化以及材料内含水率与环境空气相对湿度相平衡的关系属于工程热力学范畴。

第三,计算机科学。包括针对不同实际问题建立物理数学模型及相应差分方程、数值计算方法的选取、用 FORTRAN 等计算机语言进行源程序编写。

总之,《多孔材料传热传质及其数值分析》是一本以多孔材料为研究对象,以传热传质为研究内容,以数值分析为研究方法三者有机结合起来的教学用书,其内容构成了各类多孔材料热加工工艺的理论基础。

本书在内容安排及编写体例上,注重如下要点:

(1) 便于读者自学。把相当综合与复杂的多孔材料传热传质现象以及相应数学上的难点,进行分解,使学习上的疑难点分散到不同章节。

(2) 章节的安排遵循由浅入深, 由易及难, 循序渐进的认识规律。

(3) 全书侧重于对物理现象机制的分析及紧密相扣的数学描述以及数学问题的求解。叙述物理现象时力求表达成数学形式, 介绍数学公式时力求阐明其物理含义。

(4) 结合工程背景, 内容与体系可视为各类含湿多孔材料干燥工艺的理论基础, 也是多孔材料热压加工工艺理论基础。

(5) 侧重于上述三个学科的结合, 而对其中每一学科不作过于深入的探讨。

全书共设 6 章。

第 1 章, 概述。介绍“多孔材料传热传质数值分析”的历史与现状; 阐述其研究对象、内容与方法。

第 2 章~第 6 章, 从分散的单一现象到综合的多种现象, 从材料结构比较简单到复杂, 由简及繁进行介绍。

第 2 章讨论密实固体中单纯的热传导现象。介绍热传导规律, 建立相应的数学模型。模型只包含一个因变量(温度), 对应一个控制方程(导热微分方程)。介绍求解导热问题偏微分方程的数值方法。密实的固体材料可理解为多孔材料的一种极端情形, 孔隙率为 0, 没有流体相, 只有固相。

第 3 章讨论静止水加热与水表面蒸发。介绍湿空气状态, 液体表面传热传质现象, 建立反映液相水响应数学模型。模型包含 2 个因变量(水的温度与质量), 2 个控制方程。介绍了求解常微分方程组的数值方法。静止的水可理解为多孔材料的另一种极端情形, 固相占有率为 0, 没有固相, 只有流体相。

下面三章是上述两章两个极端情形之间的中间情形, 即固体与孔隙共存, 固相与流体相共存。

第 4 章讨论固-气共存多孔材料的加热。连续固相骨架间的孔隙中只存在某一气体(如干空气)。介绍气体的渗流规律, 气体等温与非等温渗流模型。模型包括 5 个因变量(材料温度与密度, 气体密度、压力及速度)及 5 个控制方程。介绍多个因变量相互耦合方程组的数值求解方法。其中以泡沫塑料、干木材为例, 介绍等效导热系数法等简化模型。

第 5 章讨论含水非吸湿性多孔材料的加热与水分迁移, 其中固相骨架不含水, 而液相的水由于毛细管力作用可自由地停留在材料内任意一个孔隙。在加热过程中多孔材料内部固-液(水)-气(水蒸气和空气)三相发生温度变化及水分迁移。这里涉及多孔材料内水的渗流与蒸发, 孔隙内水蒸气与空气相互扩散等现象。分别建立了零维、一维扩散及一维扩散-蒸发模型。以砂土干燥为例, 介绍了这类材料的传热传质行为。

第6章讨论吸湿性含水多孔材料的加热与水分迁移。自由水贮存在固相骨架的孔隙中,吸着水贮存于固相骨架内,孔隙内有液相水、气相水蒸气及空气。孔隙内的水蒸气密度与固相骨架内吸着水的含量及温度之间有确定关系(等温吸附线)。以木材干燥为例,介绍了这类材料的传热传质行为。同样的方法完全可以,而且应该移植到诸如谷物、棉籽、烟叶、食品及一些化工材料的干燥过程。

作者衷心感谢天津大学赵镇南教授与北京科技大学张欣欣教授对书稿的审阅,两位教授的宝贵意见对提高本书的质量大有裨益。

本书的出版得到了“洛伊教育基金”、“赛迪教育基金”、“凤凰教育基金”、“威仕炉教育基金”和“思能教育基金”的大力支持,在此表示衷心的感谢。

存在于自然界与广泛工程领域的多孔材料传热传质现象是极其复杂的。对这一复杂现象的认识,其中很多方面在学术界尚有不同见解,或者说,学科的发展正处于不断成熟的阶段,加之作者水平所限,书中不妥或错误在所难免,欢迎读者不吝指正。

作者联系方式: yuchangming1937@yahoo.cn。

俞昌铭

2010年12月于北京

## 主要符号表

英文字母符号	符号含义与单位
$a$	热扩散率, $\text{m}^2/\text{s}$
$A$	面积, $\text{m}^2$
$A_m$	质量比表面积, $\text{m}^2/\text{g}$
$A_v$	体积比表面积, $\text{m}^2/\text{cm}^3$
$c$	比热容, $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
$C$	摩尔浓度, $\text{kmol}/\text{m}^3$
$d$	直径, $\text{m}$
$D$	质扩散率, $\text{m}^2/\text{s}$
$D_f$	分形数
$F$	力, $\text{N}$
$h$	对流传热表面传热系数, $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ; 比焓, $\text{J}/\text{kg}$
$h_m$	对流传质表面传质系数, $\text{m}/\text{s}$
$H$	高度, 厚度, $\text{m}$
$k$	渗透系数; 节点编号
$K$	渗透率, $\text{m}^2$
$L$	长度, $\text{m}$
$M$	摩尔质量, $\text{kg}/\text{mol}$
$m$	质量, $\text{kg}$
$\dot{m}_s$	表面蒸发率, $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$
$\dot{m}_i$	界面蒸发率, $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$
$\dot{m}_v$	体积蒸发率, $\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$
$N$	节点(单元)数目
$p$	压力, $\text{Pa}$
$q$	热流密度, $\text{W}/\text{m}^2$
$q_m$	质量流密度, $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$
$q_v$	体积流量, $\text{m}^3/\text{s}$ ; 体积释热强度, $\text{W}/\text{m}^3$
$Q$	热流率, 热量释放率, $\text{W}$ ; 吸附量, $\text{cm}^3/\text{g}$ , $\text{mol}/\text{g}$
$r$	半径, 柱、球坐标中矢径长, $\text{m}$
$R$	热阻, $^\circ\text{C}/\text{W}$ ; 面积热阻, $(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})/\text{W}$ ; 摩尔气体常数, $\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
$S_i$	液相水饱和度
$t$	摄氏温度, $^\circ\text{C}$
$T$	热力学温度, $\text{K}$
$u$	速度( $x$ 方向), $\text{m}/\text{s}$
$U$	电位, $\text{V}$



$v$	速度( $y$ 方向), $\text{m/s}$ ; 比体积, $\text{m}^3/\text{kg}$
$V$	体积, $\text{m}^3$
$\dot{V}_a$	吸附速率, $\text{m}^3/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$
$\dot{V}_d$	解吸速率, $\text{m}^3/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$
$w$	速度( $z$ 方向), $\text{m/s}$ ;
$W$	宽度, $\text{m}$ ; 含水率, $\text{kg/kg}$ ; 功, $\text{J}$
$W^*$	相对含水率
$W_e$	平衡含水率
$x$	直角坐标
$y$	直角坐标
$z$	直角坐标

## 希腊字母符号

## 符号含义与单位

$\delta$	厚度, $\text{m}$
$\gamma$	汽化潜热, $\text{J/kg}$
$\eta$	动力粘度, $\text{Pa} \cdot \text{s}$
$\phi$	孔隙率
$\phi_a$	面孔隙率
$\phi_v$	体孔隙率
$\varphi$	相对湿度; 相对压力
$\lambda$	导热系数, $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
$\nu$	运动粘度(动量扩散率), $\text{m}^2/\text{s}$
$\theta$	无量纲过余温度; 接触角, $\text{rad}$
$\rho$	密度, $\text{kg}/\text{m}^3$ ; 容积密度, $\text{kg}/\text{m}^3$
$\sigma$	表面张力, $\text{N/m}$
$\tau$	时间, $\text{s}$
$\tau_c$	时间常数, $\text{s}$
$\tau_s$	表面剪应力, $\text{Pa}$
$\omega$	比湿度, $\text{kg/kg}$

## 相似特征数

## 特征数名称与表达式

$Bi$	毕渥数, $hL/\lambda$
$Fo$	傅里叶数, $a\tau/L^2$
$Le$	路易斯数, $a/D$
$Nu$	努塞尔数, $hL/\lambda$
$Pr$	普朗特数, $\nu/a$
$Re$	雷诺数, $uL/\nu$
$Sc$	斯密特数, $\nu/D$
$Sh$	舍伍德数, $h_m L/D$

顶标	顶标含义
•	单位时间的
—	平均
上角标	上角标含义
$n$	前一时刻
$n+1$	当前时刻
* (或 * *)	有效的, 相当的, 无量纲
下角标	下角标含义
a	空气的; 面积的
ab	气体 a 对气体 b
as	空气对固体
c	临界的; 弯曲的
cond	导热的
conv	对流的
d	以直径为特征的; 干的; 露点
dry	干球的
e	环境的; 有效的, 相当的; 平衡的
fsp	纤维饱和点
g	气体
i	内部界面
l	液体; 液相水
m	质量; 平均
L	纵向的
p	平板; 平面; 粒子
re	表征
s	固体; 表面; 饱和; 固相
sa	固-气交界面; 固体与空气
sv	饱和水蒸气
T	横向的
v	水蒸气; 体积
va	水蒸气对空气
vs	水蒸气对固体
wet	湿球的
$\phi$	孔隙的
0	初始的

第 1 章 概述 .....	1
1.1 多孔材料的定义与分类 .....	1
1.1.1 多孔固体、多孔介质、多孔材料及复合材料 .....	1
1.1.2 多孔材料分类及典型多孔材料 .....	4
1.1.3 多孔材料中几个常用物理量 .....	8
1.2 多孔材料传热传质研究的内容与范围 .....	16
1.2.1 热传导 .....	16
1.2.2 渗流、热对流与对流传热 .....	17
1.2.3 质扩散与对流传质 .....	18
1.2.4 材料内水蒸气凝结与液相水蒸发 .....	19
1.2.5 毛细管现象与吸附现象 .....	19
1.2.6 液相水与水蒸气的热力学平衡与非平衡 .....	20
1.3 多孔材料传热传质问题的数值研究方法 .....	23
1.3.1 实际问题模型化 .....	23
1.3.2 物理模型基础上的数学模型 .....	24
1.3.3 求解数学模型 .....	25
1.3.4 求解结果显示 .....	26
1.3.5 应用举例 .....	27
习题 .....	31
参考文献 .....	33
第 2 章 固体材料加热 .....	34
2.1 温度场与傅里叶定律 .....	35
2.1.1 温度场与温度梯度 .....	35
2.1.2 热流密度向量 .....	38
2.1.3 傅里叶定律 .....	40

2.1.4	导热系数与热扩散率 .....	41
2.2	导热定解问题的建立与求解 .....	42
2.2.1	导热方程推导 .....	43
2.2.2	定解条件 .....	49
2.2.3	求解导热问题的方法 .....	52
2.3	一维非稳态导热问题精确分析解 .....	54
2.3.1	第一类边界条件 .....	55
2.3.2	第三类边界条件 .....	61
2.3.3	第二类边界条件 .....	63
2.3.4	算例 .....	63
2.4	一维非稳态导热问题数值解 .....	66
2.4.1	用差商代替微商建立差分方程 .....	66
2.4.2	用控制单元建立差分方程 .....	69
2.4.3	差分方程的求解 .....	71
2.4.4	算例 .....	76
2.5	平板加热三维导热问题 .....	79
2.5.1	偏微分方程形式 .....	80
2.5.2	差分方程形式 .....	81
2.5.3	算例 .....	87
习题	.....	91
参考文献	.....	92
第3章	静止水加热及表面蒸发 .....	94
3.1	环境空气的湿度 .....	95
3.1.1	湿空气 .....	95
3.1.2	湿空气状态参数 .....	97
3.1.3	干球温度、湿球温度及空气湿度 .....	102
3.2	水面上的边界层及表面对流传热、传质系数 .....	104
3.2.1	速度、温度及水蒸气密度边界层 .....	105
3.2.2	空气流对水表面的表面传热系数 .....	109
3.2.3	水表面对空气流的表面传质系数 .....	113
3.3	物理数学模型 .....	117
3.3.1	物理模型 .....	117
3.3.2	数学模型 1——移动边界偏微分方程定解问题 .....	120



3.3.3	数学模型 2——常微分方程组初值问题 .....	123
3.3.4	数学模型 3——代数方程 .....	125
3.4	数学模型的数值求解 .....	125
3.4.1	数值求解移动边界偏微分方程定解问题 .....	126
3.4.2	数值求解常微分方程组初值问题 .....	131
3.4.3	数值求解代数方程 .....	133
3.5	算例 .....	134
3.5.1	已知条件 .....	134
3.5.2	预测的主要结果 .....	134
3.5.3	预测结果讨论 .....	136
3.6	空气干球温度、湿球温度及流动速度的影响 .....	138
3.6.1	空气干球温度、湿球温度及流动速度对其他定解条件 的影响 .....	138
3.6.2	空气干球温度对水的热响应的影响 .....	140
3.6.3	空气湿球温度对水的热响应的影响 .....	143
3.6.4	空气流动速度对水的热响应的影响 .....	147
3.6.5	算例汇总 .....	149
	习题 .....	150
	参考文献 .....	151
第 4 章	固气多孔材料加热及渗流 .....	153
4.1	达西定律与渗透率 .....	154
4.1.1	达西定律 .....	154
4.1.2	渗透率 .....	157
4.2	守恒方程及其封闭性 .....	159
4.2.1	质量守恒方程 .....	160
4.2.2	能量守恒方程 .....	162
4.2.3	动量方程与气体状态方程 .....	164
4.2.4	方程组的封闭性 .....	164
4.3	封闭孔隙多孔材料加热 .....	165
4.3.1	等效导热系数与分形理论 .....	166
4.3.2	一维封闭孔隙多孔材料平板加热 .....	178
4.4	气体等温渗流 .....	181
4.4.1	一维稳态等温渗流 .....	181

4.4.2	一维非稳态等温渗流	182
4.4.3	二维非稳态等温渗流	188
4.5	固气多孔材料热板加热	193
4.5.1	控制方程及定解条件	194
4.5.2	差分方程	195
4.5.3	算例及计算结果讨论	204
4.6	固气多孔材料空气流加热	215
4.6.1	控制方程及定解条件	216
4.6.2	差分方程	217
4.6.3	算例及计算结果讨论	219
	习题	222
	参考文献	224
<b>第5章</b>	<b>含水非吸湿性多孔材料加热及水分迁移</b>	<b>226</b>
5.1	液相水的表面性质	227
5.1.1	表面张力与表面能	227
5.1.2	液相水其他表面现象	229
5.1.3	多孔材料内毛细管力分布及水的迁移	235
5.2	质(量)扩散及质(量)扩散方程	237
5.2.1	质扩散与费克定律	237
5.2.2	质量守恒与质扩散方程	240
5.2.3	多孔材料中质扩散	240
5.3	集总参数模型及数值分析	245
5.3.1	物理模型	245
5.3.2	数学模型	247
5.3.3	差分方程	253
5.3.4	算例及计算结果讨论	255
5.4	一维扩散模型及数值分析	258
5.4.1	物理模型	258
5.4.2	数学模型	259
5.4.3	差分方程	263
5.4.4	算例及计算结果讨论	265
5.5	一维扩散-蒸发模型及数值分析	268
5.5.1	物理模型	268

5.5.2 数学模型.....	269
5.5.3 差分方程.....	275
5.5.4 算例及计算结果讨论.....	280
5.6 三种模型小结 .....	288
习题.....	291
参考文献.....	292
<b>第 6 章 含水吸湿性多孔材料加热及水分迁移.....</b>	<b>294</b>
6.1 固体表面性质及等温吸附线 .....	295
6.1.1 等温吸附线.....	295
6.1.2 等温吸附线机理解释.....	298
6.1.3 等温吸附线数学描述.....	304
6.2 吸着水迁移机理及数学描述 .....	309
6.2.1 吸着水迁移的物理解释.....	309
6.2.2 吸着水迁移的数学描述.....	312
6.3 吸湿性多孔材料干燥原理及数值分析 .....	315
6.3.1 物理模型.....	316
6.3.2 数学模型.....	318
6.3.3 差分方程.....	325
6.3.4 算例及计算结果讨论.....	331
习题.....	342
参考文献.....	343
后记 1 .....	345
后记 2 .....	347

# 第 1 章

## Chapter

# 概 述

众所周知,在大千固态物质世界中,多孔性固体可谓无所不在。大到自然界的土壤、岩石、树木,小到人们日常生活中的食品、衣服、纸张、家具。工程材料中更是比比皆是。以传统建筑结构材料为例,钢结构、木结构及混凝土结构是人们熟知的三大建筑结构。21 世纪初,全球每年钢的产量约 10 亿 t,木材的产量与之相当,混凝土(水泥)产量约 30 余亿 t。木材与混凝土均属多孔材料。这样,在强度结构材料中,多孔性材料占 70% 以上。此外,作为建筑材料的砖、瓦等也是多孔性材料。在其他领域诸多新型工程材料中,如用于消音隔热的泡沫塑料、作为化工材料的催化剂、用于环保的吸附剂、航空航天器件中众多复合材料等都属于多孔材料。总之,多孔性材料广泛存在于自然界、工程界及人们日常生活之中。因此,对它们在不同条件下的行为,包括传热传质行为,进行了解、认识与研究越来越受到人们的关注。从 20 世纪 60 年代起,就有不少关于多孔性固体传热传质的专著相继问世,其中 Liukov 与 Whitaker 的工作最具代表性<sup>[1-4]</sup>。在我国,近 20 年来,相关内容已反映在供研究生使用的传热传质教学用书中<sup>[5]</sup>,专业著作<sup>[6,7]</sup>也陆续出版。

本章将概述“多孔材料传热传质及其数值分析”的研究对象、研究内容及研究方法。

## 1.1 多孔材料的定义与分类

### 1.1.1 多孔固体、多孔介质、多孔材料及复合材料

含有大量孔隙的固体为多孔固体。在多孔固体的孔隙中大都存在流体(液体与(或)气体),因此,多孔固体实际上是固体与流体的多相混合物,或者说,是固体骨架与流体的多相混合物。在不同应用场合,多孔固体又被称为多孔物体、多孔物料、多孔材料或多孔介质。

为了说明上述这些学术名称在含义上的相同处与某些差异以及它们的由来,需以追溯这一研究领域的历史作为切入点。



法国水利工程师亨利·菲利贝特·加斯帕特·达西(Henry Philibert Gaspard Darcy)(1803—1858年)是这一领域的先驱者。他在1824—1848年间致力于他出生城市第戎(Dijon)的用水供应系统工程。在经历用深挖井取水方案失败后,完成了利用地表水,即从水库取水的城市供水工程。他在晚年(1855—1856年)专心于研究泥沙中水的流动,通过实验建立了著名的达西定律<sup>[8]</sup>,表述如下:

$$q_v = kA \frac{\Delta H}{L} \quad (1-1-1)$$

即泥沙渗流中水的体积流量 $q_v$ (单位时间内水流过的体积)与水的静压差 $\Delta H$ (其实是水位高度差)成正比,与水流过的长度 $L$ 成反比,与水流通过的断面积 $A$ 成正比。比例系数 $k$ 被称为渗透系数,也称水力传导系数等[请读者注意式(1-1-1)与式(4-1-1)的差别]。

在此后很长一段历史时期内,人们的研究始终停留在土壤与岩石中水的流动问题。直到20世纪30年代,随着石油开采,人们开始关注岩石中天然气与石油的流动问题。长期以来,人们在讨论自然界诸如土壤中水分的迁移,岩石缝隙中天然气、石油的渗流等问题时,总是把土壤与岩石视为水、天然气与石油的载体或介质。这里,人们关心的重点不是土壤及岩石本身,而是其中流体的行为。介质这一名称所涵盖的不仅仅限于作为流体的载体,而是把固相骨架与流体共存的多相体系称为多孔介质<sup>[5]</sup>。随着研究领域不断扩大,讨论由多相体系组成的传热传质问题被称为多孔介质传热传质问题。逐渐地,多孔介质传热传质成为传热传质学科内一个相对独立的重要分支<sup>[6,7,9]</sup>。介质一词的另一层含义常指流体物质,把流体称为流体介质,例如,热空气流环境包围被干燥固体,人们把被干燥固体称为干燥材料而把热空气环境称为干燥介质。这里,把固体视为材料,流体视为介质。有些情况下,介质与物质这两个名词被相提并论。总之,有些学术名称在使用过程中不断地扩充自身的内涵。

多孔介质的一个显著特点是,由固相与流体相组成的多相体系的多孔介质中的流体相是连续相,固相骨架可以是连续相,也可以是非连续相,典型结构示意图于图1-1。

从工程传热学的学科发展来看,若以表示热传导的傅里叶定律<sup>[10]</sup>问世(1822年)作为建立传热学标志,到路易斯(Lewis)、舍伍德(Sherwood)将传热学扩展成传热传质学经历了一个世纪。传质学在工程上的应用,源自被誉为化学工程之父的路易斯,他率先提出了固体材料干燥的原理<sup>[11]</sup>。之后,干燥技术与理论在广泛的工程应用推动下迅速发展。各类被干燥的物品,通常称为材(物)料。可以说,在各工程领域中,总是把被制备与加工的对象称为材料,例如木材、粮食、混凝土等。

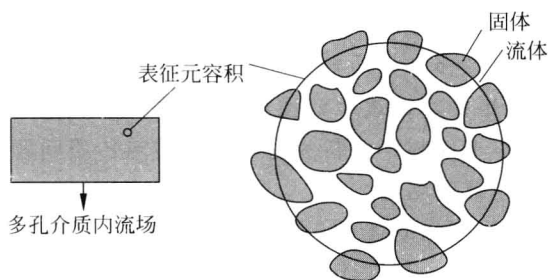


图 1-1 多孔介质示意图

由于这些材(物)料含有孔隙,统称为多孔材料。随着多孔材料在材料学科中的地位日趋重要,如今,多孔材料也已成为材料学科中的一个重要分支<sup>[12]</sup>。

良好的产品性能是材(物)料加工行业追求的主要目标之一,而产品的性能,尤其是力学性能,往往更多地依赖于多孔材(物)料中固相骨架的性能。因此,讨论这类多孔材(物)料传热传质问题时其重点不仅是材(物)料内流体相的流动与传热传质,更关注固相骨架本身及流体相对固相骨架的影响,例如,木材人造板在经受热压加工过程中,板坯内温度分布与含水率分布直接影响板坯的密度分布,最终影响板材的力学性能。又如,很多多孔性固体产品在干燥过程中,为保证产品质量,往往要求控制其变形程度,而材料的变形与其中温度分布与含水率分布关系密切。

与多孔介质相比,多孔材料的一个显著特点是,多孔材料中的固相骨架是连续相,流体相可以是连续相,也可以是非连续相。参照文献[13]中的插图,图 1-2 所示为软木结构示意图,以此作为多孔材料的一种典型。

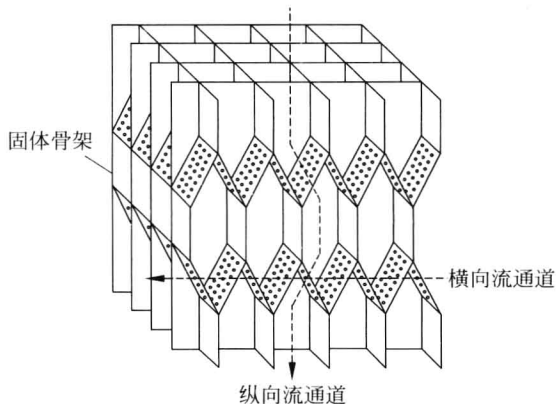


图 1-2 多孔材料示意图

对照图 1-1 与图 1-2 应领悟到,多孔材料多少有别于多孔介质。

综上所述,多孔固体、多孔介质与多孔材(物)料尽管它们的基本内涵相近,但在不同应用场合,为了更真实地表示其物理过程,更准确地给予数学描述,使用不同的名称是必要的。本书以材料学科为背景讨论传热传质问题,因此,将更多地使用多孔材料传热传质这样的名称。

应当提及,如果人们把由固体相与流体相组成的材料称为多孔材料,则把常温条件下,由一种固体相与另一种固体相所组成的材料称为复合材料。如果在高温条件下,复合材料中的某一固体相转变为流体相,则这种复合材料在高温条件下转变成多孔材料。例如,返回地面的人造卫星表面覆盖的复合材料,它是一种碳化烧蚀体。当人造卫星返回地面进入大气层时,这种碳化烧蚀体复合材料接受大气环境强烈对流加热使其表面温度急剧上升,复合材料内的树脂达到热解温度,发生相变,成为流体,而高温基体材料聚积在一起,形成骨架状的碳化层,这样,复合材料就变为多孔材料。又如,火箭发动机尾喷管喉部,由于高温高速燃气对它的冲刷,在材料表面产生巨大的热流,为保障材料免于过高温,在其表面覆盖着起保护性冷却作用的发汗粉末冶金材料。图 1-3 示意地说明了多孔介质、多孔材料与复合材料之间的关系。

针对图 1-3(a),若流体相是连续相则为多孔介质,若固体相为连续相则为多孔材料。针对图 1-3(b),若多种固体相中有一种固体相转变为流体相,则复合材料转变为多孔材料。

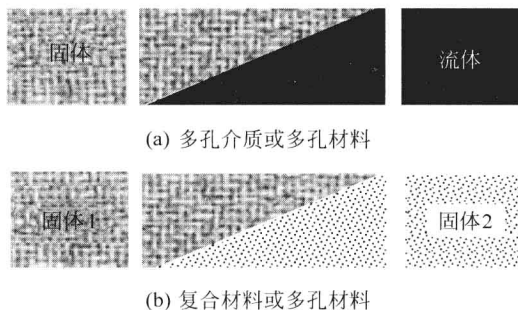


图 1-3 多孔介质、多孔材料与复合材料

### 1.1.2 多孔材料分类及典型多孔材料

在多孔介质传热传质研究中,一般并不是按多孔介质本身的物理性质和化学性质的不同进行分类,而是按多孔介质中流体的状态与行为进行分类研究。例如,

按多孔介质中流体在孔隙中的形态及占有率进行分类<sup>[7]</sup>：把孔隙中充满液体的称为湿饱和多孔介质，孔隙中液体与蒸气共存的为非饱和多孔介质，孔隙中只有纯蒸气的为干饱和多孔介质。又如，按多孔介质中流体相在孔隙中状态与传热传质行为进行分类<sup>[6,9]</sup>，也即，按控制多孔介质中流体的动量、能量和质量传递的模式进行分类，分为：多孔介质中流体流动过程；多孔介质中热传导及质量扩散过程；多孔介质中对流传热及对流传质过程以及多孔介质中相变传热及传质过程等。

在材料学科中，为了更好地认识多孔材料的全貌，对繁多的多孔材料进行了分类与鉴别。分类的方式很多，例如，按多孔材料孔隙或固相颗粒尺度大小分类<sup>[14]</sup>。最常见的是按多孔材料的来源和固相骨架的化学成分进行分类<sup>[12]</sup>，如表 1-1 所示。

表 1-1 多孔材料分类之一

天然多孔材料		人造多孔材料		
非生物性多孔材料 (岩石、土壤、砂土)	生物性多孔材料 (木材、竹、谷物、珊瑚、动物骨骼、海绵)	金属多孔材料 (粉末烧结型、纤维型、铸造型、沉积型、复合型)	无机多孔材料 (多孔陶瓷、混凝土、砖、瓦)	有机多孔材料 (泡沫塑料、含孔橡胶)

在多孔材料传热传质研究中，参照材料科学分类的习惯，着重考虑对传热传质有直接影响的结构特征进行分类，如表 1-2 所示。

表 1-2 多孔材料分类之二

固-气(含气)多孔材料			固-液-气(含水)多孔材料		
孔隙封闭	孔隙连通		非吸湿性		吸湿性
	非吸附性	吸附性	非浸润性	浸润性	

含水多孔材料中的吸湿性(hygroscopic)材料与非吸湿性(non-hygroscopic)材料是以材料中固相骨架是否具有吸收水分的能力来划分。这样，吸湿性多孔材料中包含的水首先是包含在固相骨架内，称作吸着水(bound water)，其次才是贮存于固相骨架间的孔隙内，称作自由水(free water)。非吸湿性多孔材料中包含的水仅仅是贮存在固相骨架间的孔隙中的自由水。所以，是否具有吸附吸着水的能力是区别吸湿性与非吸湿性多孔材料的根本标志。关于吸着水与自由水的论述详见 5.1 节、6.1 节及 6.2 节。在表 1-1 中，天然多孔材料中的生物性多孔材料大都是

吸湿性多孔材料,非生物性的多孔材料大都为非吸湿性材料;人造多孔材料中,根据材料的来源,可以是非吸湿性材料(如表 1-1 所列大多数材料),也可以是吸湿性多孔材料(如各种人造木板、布匹、纸张、食品)。

固-气多孔材料中的吸附性(adsorption)通常是指该材料中的固相骨架对某种气体具有吸附能力,如天然材料中的木炭,化工产品中用作吸附剂的活性炭等。

在含水非吸湿性多孔材料中浸润(wetting)与否是以固相骨架毛细管对水的亲疏程度来划分的。亲液性多孔材料,在自然状态下,水将均匀地分布在材料内。若为疏液性多孔材料,水在重力作用下将集中在材料下端,甚至从材料中流出。孔隙尺度大小也会影响材料对水的浸润性,大孔隙的多孔材料浸润性差,小孔隙的多孔材料浸润性强。

虽然表 1-1 和表 1-2 已列出不同形式的多孔材料,但仍难以囊括全部。尽管各类多孔材料的共同特点是多孔性固体,但由于固相骨架物理化学性质不同,骨架与孔隙的结构与尺度不同,固相骨架孔隙中流体种类与性质不同,材料在被加工或工作时所处环境条件不同,从而导致其中的传热传质机理有很大的差别。因此,难以找出一种典型材料,对其中的传热传质的分析可概括全体。纵观表 1-2 所列多孔材料的各种类型,就其中传热传质过程的复杂程度而言,表中从左到右的排列反映由简单到复杂的顺序。本书的叙述大体上按表 1-2 自左而右的顺序。应该说,生物性多孔材料是多孔材料中结构最为复杂的一类,其中的传热传质过程也最为复杂,这里以木材为例作扼要介绍。

木材,包括从森林中砍伐下来的原木以及由木质元素构造成的各种人造板,是一种复杂的多孔材料。其复杂性在于,它是一种生物体,由各种结构相当复杂的细胞组成。作为生物体,树种不同,细胞结构就不同。即便是同一树种,由于生长期不同,细胞结构也不同。同一树种同样树龄的树木,在一棵树木不同部位由于早生与晚生的不同生长期,其细胞结构也不相同。总之,木材的差异性很大。这样,在对它的研究中,也只能取其中某一典型的木材细胞结构作为研究对象。

根据木材学的文献[15]报导,图 1-4 与图 1-5 示意地展示了一种典型树材的粗视构造以及这种树材细胞壁的细观构造。

从图 1-4 这个粗视结构中我们看到,木材含有几乎肉眼可见的孔隙大小不同的细胞束组成。对每个细胞而言,又可分解成如图 1-5 所示结构。

由图 1-5 可知,木材中除了含有大量肉眼可见的细胞腔的孔隙,还有大量肉眼不能及的小尺度( $\mu\text{m}$  量级以下)的孔隙。

从以上两个简图中我们清楚地看到,木材作为一种特定的多孔材料,其结构是十分复杂的。这种复杂性表现在木材的宏观特性上,如下所述:

(1) 材料物理性质(如导热系数、渗透率)呈各向异性。由此导致木材中传热

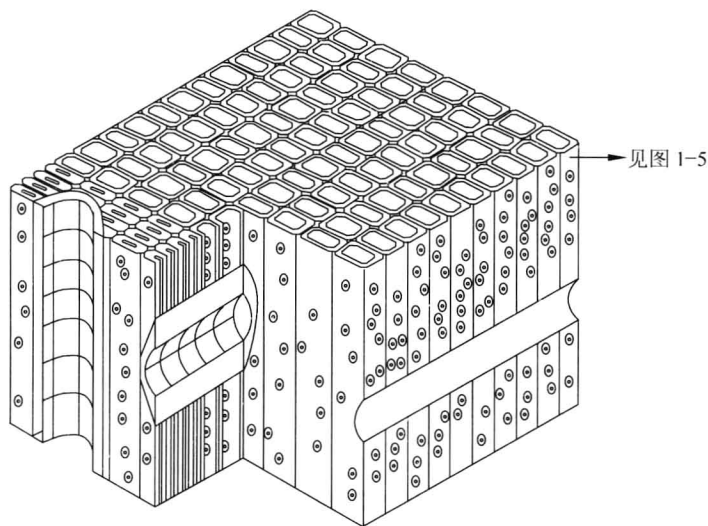


图 1-4 针叶树材粗视构造示意图

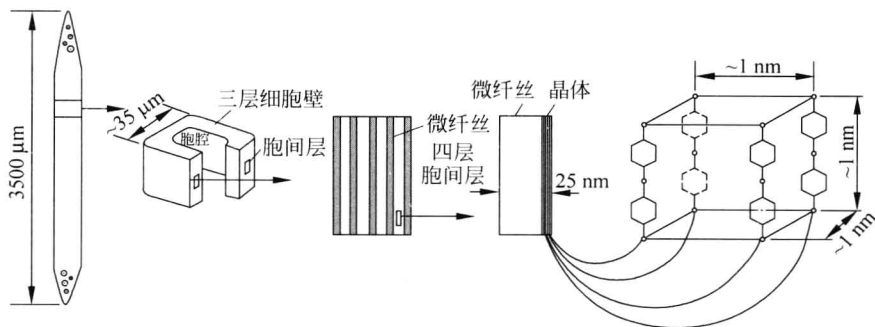


图 1-5 构成针叶树材细胞壁的各元素间的相互关系

与流体流动都具各向异性。

(2) 木材中水分迁移行为复杂。这是由木材细胞几何特征及水在木材细胞内存在形式决定的。木材中的水分按其存在形式不同分为自由水、吸着水与结合水三种。自由水是以游离状态存在于细胞间的缝隙及细胞腔这类大毛细管( $10\text{ }\mu\text{m}$ 数量级)内的水分;吸着水是以吸附状态存在于细胞壁中微毛细管( $10\text{ nm}$ 数量级)内的水分;而化合水是指与木材细胞壁物质组成呈牢固结合状态的水<sup>[16,17]</sup>。水的存在形态不同,相应地迁移机理也不同。木材在加工中水的迁移行为直接影响木

材成品的宏观性能。

(3) 高孔隙率与低渗透率。如表 1-3 所示,木材内的孔隙率范围大致在 30%~80%。显然,木材有高的孔隙率。另一方面,木材的渗透性并不高(参见表 4-2)。这一特点也是由木材细胞结构决定的。尽管木材细胞内与细胞间有很大的孔隙,但这些孔隙基本上被细胞壁相互隔离,只是通过细胞壁上的微小纹孔使孔隙间相通。也可以说,尽管木材有高的孔隙率而贡献于流体流动的有效孔隙率却很低。

(4) 材料的物理性质易发生变化。因为,木材中有大量孔隙,当材料在受热与受压加工过程中其形状发生变化,使原本比较均匀分布的孔隙率呈不均匀分布。从宏观上看,表现为材料密度呈不均匀分布,由此导致材料的诸多物理性质(导热系数及渗透率)呈不均匀分布。

表 1-3 我国部分树种细胞壁密度、绝干密度与孔隙率<sup>[16]</sup>

树 种	细胞壁密度/(kg/m <sup>3</sup> )			木材绝干 密度/(kg/m <sup>3</sup> )	孔隙率/%
	心材	边材	平均		
陆均松	1512	1535	1523	581	61.8
鸡毛松	1515	1517	1516	486	67.9
子京	1513	1520	1516	1033	31.9
红桐	1543	1531	1537	1032	32.8
轻木			1518	244	83.9

### 1.1.3 多孔材料中几个常用物理量

多孔材料由于孔隙的出现以及孔隙中流体的存在,引申出一些密实固体材料不曾有的新的物理量,如孔隙率、比表面、液相水饱和度、含水率及表征元容积等。

#### 1.1.3.1 孔隙与孔隙率

若多孔材料整体的体积为  $V$ ,它由固相体积  $V_s$  与非固相(孔隙)体积  $V_\phi$  组成,即

$$V = V_s + V_\phi \quad (1-1-2)$$

孔隙是指多孔材料中非固相所占有的体积  $V_\phi$ ,孔隙率(也称孔隙度或孔度) $\phi$ 是指孔隙在整个材料中所占有的体积份额,其定义为



$$\phi = \frac{V_p}{V} \quad (1-1-3)$$

孔隙率  $\phi$  是表征多孔材料的一个重要特征量。

由式(1-1-3)定义的孔隙率在概念上是非常清楚的,但在实际应用时,仍有很多细节使人困惑,为此,需要厘清及正确处理。这里列举几种情形加以讨论。

(1) 对于非吸湿性多孔材料,由于其固相骨架不吸收水分,其体积  $V$  不会因为孔隙中是否有水的存在而发生变化,称为刚性骨架。这样,可用简单的实验方法求得孔隙率。例如,用水将多孔材料中的孔隙灌满,而后测量孔隙中水的质量,求得其体积,按式(1-1-3)的定义得到孔隙率。但对于吸湿性多孔材料,固相骨架具有吸收水分的能力。把水浸入多孔材料过程中,在向孔隙充填水的同时,部分水被固相骨架吸收,导致固相骨架的体积进而多孔材料整体的体积  $V$  发生一定的变化(称为湿胀)。这样,固相骨架不再是刚性的,上述简单的实验难以求得孔隙率。

为求吸湿性多孔材料的孔隙率,先将材料烘至绝干,得到烘干后的材料体积  $V$  与质量  $m_d$ ,由此求得绝干材料的平均密度  $\rho_d$  为

$$\rho_d = \frac{m_d}{V} \quad (1-1-4)$$

若已知绝干固相骨架的密度为  $\rho_s$ ,且认为固相骨架的质量为绝干多孔材料的质量,则

$$m_d = \rho_s(1 - \phi)V \quad (1-1-5)$$

将式(1-1-5)代入式(1-1-4),经整理后可得

$$\phi = 1 - \frac{\rho_d}{\rho_s} \quad (1-1-6)$$

式(1-1-6)是多孔材料孔隙率的另一表示形式。例如,如图 1-4 所示的木材结构,其中固相骨架为细胞壁,对各类不同树种,它们在绝干条件下的密度  $\rho_s$  大致相同,处在  $1490 \sim 1570 \text{ kg/m}^3$  这个范围内,平均值为  $1530 \text{ kg/m}^3$ 。而不同树种的绝干密度  $\rho_d$  在  $250 \sim 1000 \text{ kg/m}^3$  这个范围内,则木材的孔隙率  $\phi$  分散在  $32\% \sim 84\%$  这个范围内,见表 1-3。

应该指出,式(1-1-6)所示孔隙率中的孔隙不仅是被固相骨架所包围的大孔隙,还包括存在于固相骨架内的小孔隙。

(2) 在实际应用孔隙率这一物理量时,不仅应用它的几何属性,还应用它的物理属性。也即,必须顾及孔隙率对物理过程,特别是对质量与能量传输过程的影响。由此,在讨论孔隙率对传热传质过程影响时,引入有效孔隙率的概念。

多孔材料内的孔隙,从理论上讲,它们可以是空穴,即孔隙中没有任何物质。这样,多孔材料固相骨架的质量就是多孔材料的质量。而且,孔隙间是否连通对多孔材料的宏观性质不会有影响。但事实上,孔隙中总是有流体。在此条件下,多孔材料中的孔隙是否连通对多孔材料的宏观性质有着直接影响。例如,用作隔热材料的泡沫塑料,正是利用材料中的孔隙不连通,且气体的导热系数远低于泡沫塑料中固相骨架的导热系数这一特点以达到提高材料热阻,减少热量损失的隔热效果。相反,工业中诸多多孔材料的加热干燥工艺,正是利用材料中孔隙的连通性,在受热条件下,将孔隙中的水(或水蒸气)通过连通的孔隙输送到材料周围的环境达到使材料干燥的目的。

对于相互连通的孔隙,由于连通程度不同,对传热传质过程的影响也不同。

图 1-6 被用来说明引入有效孔隙率的必要性及孔隙率与有效孔隙率的联系。孔隙率的几何特征比较容易被量化,如式(1-1-3)或式(1-1-6)所示;而孔隙率的物理特性,如有效孔隙率,则难以被量化。图 1-6 所示的四种情形,它们的孔隙率基本上可认为是相同的,即孔隙在材料内占有的空间总量都相同。四种情形不同之处是孔隙间的连通程度不同,则由此引起有效孔隙率不同。

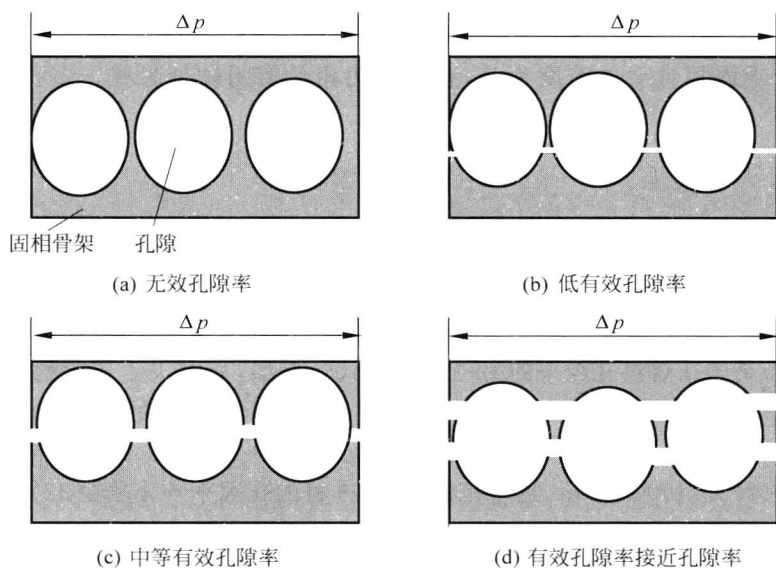


图 1-6 孔隙率与有效孔隙率

如图 1-6 所示,当材料两端有压力差  $\Delta p$  时,在图 1-6(a)情形下,由于孔隙间彼此完全被固相骨架隔开,流体完全不能在孔隙间流动,有效孔隙率为零,如闭孔的

泡沫塑料;在图 1-6(b)情形下,孔隙间连通的面积很小,有效孔隙率很低,木材结构大都如此;在图 1-6(c)情形下,孔隙间的连通面积加大,但仍远小于孔隙的截面积,此时,有效孔隙率加大,但在实际孔隙内仍有部分流体相对地处于静止状态,大部分无机多孔材料(如砂土)属于此情形;在图 1-6(d)情形下,孔隙间的连通面积继续加大,达到与孔隙截面积相当,孔隙内的流体不再有静止部分,有效孔隙率接近(实际)孔隙率,用作洁具的高孔隙率泡沫塑料属于这种情形。

上述讨论的有效孔隙率是针对孔隙间有流体流动与质量迁移而言的。如果如图 1-6 所示的材料两端有温度差  $\Delta t$ ,材料内部就会有热量传输。相应地,应有针对热量传输的有效孔隙率。

(3) 在讨论上述与传输过程相关的有效孔隙率时,有必要引入面孔隙率的概念。若用  $\phi_v$  与  $\phi_a$  分别表示体孔隙率与面孔隙率,则体孔隙率  $\phi_v$  即为式(1-1-3)定义的  $\phi$ ,如图 1-7(a)所示,这里  $V$  是立方体的体积, $V_\phi$  是立方体内球形孔隙的体积;面孔隙率  $\phi_a$  如图 1-7(b)所示,并可表示为

$$\phi_a = \frac{A_\phi}{A} \quad (1-1-7)$$

式中, $A$  为方框的面积; $A_\phi$  为方框内椭圆形孔隙的面积。

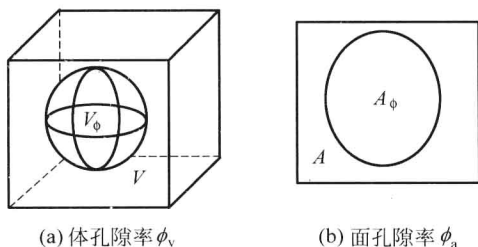


图 1-7 体孔隙率与面孔隙率

显然,面孔隙率  $\phi_a$  与体孔隙率  $\phi_v$  一样,都是处于  $[0, 1]$  这个范围之内的无量纲数。

对一块多孔材料,定义与得到体孔隙率  $\phi_v$  (或  $\phi$ ) 是一件相对比较容易的事,但对于面孔隙率  $\phi_a$ ,无论是科学定义还是实际测量就不是很容易了。在建立数学模型时,常常假设面孔隙率  $\phi_a$  等于体孔隙率  $\phi_v$ ,并统一写作  $\phi$ 。

与孔隙率相联系的另一个基本参数是孔隙的面积,或者说,孔隙与固相骨架的交界面面积。为此,引入比表面(specific surface area)这一概念。

### 1.1.3.2 比表面

比表面表示多孔材料内孔隙所具有的面积。常有两种表示方法。

#### 1. 质量比表面

质量比表面的定义为

$$A_m = \frac{A_s}{m} \quad (1-1-8)$$

式(1-1-8)中的  $m$  为多孔材料固相骨架的质量,  $A_s$  为质量  $m$  的多孔材料内孔隙的总表面积,  $A_m$  则为单位固相骨架质量包含的孔隙面积, 常用单位是  $\text{m}^2/\text{g}$ , 即  $1\text{ g}$  固相骨架物质包含的孔隙总表面积。在化学工程中研制的各种吸附剂(一种多孔材料)大都采用质量比表面<sup>[18]</sup>。

#### 2. 体积比表面

体积比表面的定义为

$$A_v = \frac{A_s}{V} \quad (1-1-9)$$

式(1-1-9)中的  $V$  为多孔材料体积,  $A_s$  为体积  $V$  的多孔材料内孔隙的总表面积,  $A_v$  则为多孔材料单位体积内包含的孔隙面积, 常用单位是  $\text{m}^2/\text{cm}^3$  (化简后为  $\text{m}^{-1}$ ), 即  $1\text{ cm}^3$  多孔材料包含的孔隙总表面积( $\text{m}^2$ )。下面的例子向读者提供有关比表面积的定量概念。

在边长为  $1\text{ cm}$  的小立方体内若放置一个直径  $d$  为  $1\text{ cm}$  的空心球, 则空心球的表面积即为上述小立方体的比表面积  $A_v$ :

$$A_v = \frac{A_s}{V} = \frac{\pi d^2}{d^3} \approx 3\text{ cm}^{-1} = 3 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{cm}^3$$

相应地孔隙率  $\phi$  为

$$\phi = \frac{V_s}{V} = \frac{\pi/6 \times d^3}{d^3} \approx 0.5$$

表 1-4 列出比表面积  $A_v$  与孔隙率  $\phi$  随空心小球的直径  $d$  变小, 小球个数  $n$  增加的变化过程。

由表 1-4 所列数据可见, 当多孔材料内的孔隙率基本保持不变而孔隙尺度变小, 则比表面积会迅速增加。在边长为  $1\text{ cm}$  的小立方体内, 孔隙的表面积可达  $3000\text{m}^2$ 。

表 1-4 比表面积的变化

$d$	$n$	$\phi$	$A_v/(\text{m}^2/\text{cm}^3)$
1 cm	1	0.5	$3 \times 10^{-4}$
1 mm	$10^3$	0.5	$3 \times 10^{-3}$
1 $\mu\text{m}$	$10^{12}$	0.5	3
1 nm	$10^{21}$	0.5	3000

### 1.1.3.3 液相水饱和度、含水率与液相水容积密度

如果说孔隙率是反映多孔材料中非固相介质所具有的相对体积,则液相水饱和度与含水率是反映含水多孔材料内水的相对含量。其中,液相水饱和度是相对体积含量,含水率是相对质量含量。

若多孔材料孔隙中被多种组分流体所占据,其中某一种流体在孔隙中占有的体积份额被称为该种流体的饱和度。液相水的饱和度  $S_l$  就是液相水在孔隙中的相对体积,可表示为

$$S_l = \frac{V_l}{V_\phi} \quad (1-1-10)$$

式中,  $V_\phi$  与  $V_l$  分别为孔隙与孔隙中液相水占有的体积。注意,这里饱和度 (saturation) 实质上是填充率 (fill percentage), 与工程热力学中的饱和水 (saturated water) 是完全不同的概念,但由于这一概念在多孔介质传热传质中已被广泛应用,这里也将使用。

还需注意的是,式(1-1-10)中的  $V_l$  是孔隙内液相水的体积。这隐含着,在固相骨架内不含有液相水。因此,严格地讲,液相水饱和度这一概念只适用于非吸湿性多孔材料。对吸湿性多孔材料用含水率 (moisture contents) 来表示水在材料中的含量更为恰当。

含水率又分为绝对含水率  $W$  (干基含水率) 与相对含水率  $W^*$  (湿基含水率), 它们的定义分别为

$$W = \frac{m_l}{m_d} \quad (1-1-11)$$

与

$$W^* = \frac{m_l}{m_d + m_l} \quad (1-1-12)$$

式中,  $m_l$  与  $m_d$  分别为多孔材料中水的质量与绝干固相骨架的质量。显然, 相对含水率  $W^*$  的值总是小于 1。

大多数多孔材料在被加工与使用过程中其绝干固相骨架的质量  $m_d$  是不变的, 这样, 用绝对含水率来表示多孔材料内的含水量显得更直观更确切, 除非特别说明, 本书在以后叙述中提及的含水率都为绝对含水率。

对非吸湿性多孔材料, 材料的绝干质量  $m_d$  可视为与固相骨架质量  $m_s$  相同, 液相水饱和度  $S_l$  与含水率  $W$  可一一对应。若取单位体积多孔材料, 则式(1-1-11)可表示为

$$W = \frac{m_l}{m_s} = \frac{\rho_l \phi}{\rho_s (1 - \phi)} S_l \quad (1-1-13)$$

式中,  $\rho_l$  与  $\rho_s$  分别为多孔材料中水与固相骨架的密度。对确定的多孔材料,  $\rho_s$  与  $\phi$  是确定的, 由式(1-1-13)可知, 含水率  $W$  与液相水饱和度  $S_l$  成正比。

借助于式(1-1-13), 在已知孔隙率条件下, 可求得多孔材料含水率的最大值。例如, 在已知固相骨架密度  $\rho_s = 1500 \text{ kg/m}^3$  与液相水密度  $\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$  条件下, 若孔隙率  $\phi = 0.5$ , 则含水率  $W$  的最大值为 0.67 或 67%; 若  $\phi = 0.6$ , 则  $W$  的最大值为 1.0 或 100%; 若  $\phi = 0.7$ , 则  $W$  的最大值为 1.56 或 156%。

液相水饱和度  $S_l$  的值在  $[0, 1]$  范围内, 而含水率  $W$  的值可以大于 1。在实际应用中, 液相水饱和度  $S_l$  与含水率  $W$  可相互转换。

对于吸湿性多孔材料, 液相水饱和度  $S_l$  与含水率  $W$  两者间一一对应关系就不明显了, 再用饱和度  $S_l$  来表示水的含量就不甚恰当, 因为式(1-1-10)中的液相水体积  $V_l$  与孔隙的体积  $V_\phi$  都不易确定。为此, 针对单位体积, 将式(1-1-13)改写成

$$W = \frac{m_l}{m_d} = \frac{m_l}{\rho_d} \quad (1-1-14)$$

液相水容积密度  $\rho_{l,v}$  是描述多孔材料内含水量的另一种表示方法, 其物理含义是, 多孔材料单位体积内所含液相水的质量, 常用的单位是  $\text{kg/m}^3$ 。对于非吸湿性多孔材料, 由式(1-1-13)可得

$$\rho_{l,v} = m_l = \rho_l \phi S_l \quad (1-1-15)$$

对于吸湿性多孔材料, 由式(1-1-14)可得

$$\rho_{l,v} = m_l = W \rho_d \quad (1-1-16)$$

综上所述, 液相水饱和度  $S_l$ 、含水率  $W$  及液相水容积密度  $\rho_{l,v}$  都是表示含水多孔材料内水的含量的物理量。针对不同材料, 不同应用场合, 应正确地选用。

### 1.1.3.4 平均密度与表征元容积

与液相水容积密度  $\rho_{l,v}$  相对应,可引入固相骨架容积密度  $\rho_{s,v}$  及气相容积密度  $\rho_{g,v}$ 。

对于非吸湿性多孔材料, $\rho_{s,v}$  与  $\rho_{g,v}$  分别为

$$\rho_{s,v} = (1 - \phi)\rho_s \quad (1-1-17)$$

与

$$\rho_{g,v} = \phi(1 - S_l)\rho_g \quad (1-1-18)$$

对于吸湿性多孔材料,则为

$$\rho_{s,v} + \rho_{g,v} = \rho_d \quad (1-1-19)$$

由固相骨架、液相水与气体多组分共同组成的多孔材料的质量为  $m$ , 体积为  $V$ , 则该材料的平均密度  $\bar{\rho}$  是固相、液相与气相容积密度之和, 即

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V} = \rho_{s,v} + \rho_{l,v} + \rho_{g,v} \quad (1-1-20)$$

对于非吸湿性多孔材料, 将式(1-1-15)、式(1-1-17)及式(1-1-18)代入式(1-1-20), 可得

$$\bar{\rho} = (1 - \phi)\rho_s + \phi S_l \rho_l + \phi(1 - S_l)\rho_g \quad (1-1-21)$$

式(1-1-21)表明, 非吸湿性多孔材料平均密度  $\bar{\rho}$  是固相骨架密度  $\rho_s$ 、液相水密度  $\rho_l$  及气体密度  $\rho_g$  的加权平均, 权系数为各组分的相对体积。

对于吸湿性多孔材料, 将式(1-1-16)及式(1-1-19)代入式(1-1-20), 平均密度  $\bar{\rho}$  为

$$\bar{\rho} = \rho_d(1 + W) \quad (1-1-22)$$

在孔隙率  $\phi$  及液相水饱和度  $S_l$  都均匀分布的多孔材料内, 在任意位置  $P$  点处取包括  $P$  点在内的容积  $\Delta V$ , 其中包含质量  $\Delta m$ , 则该容积  $\Delta V$  内材料的密度为

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1-1-23)$$

若  $\Delta V = V$ ,  $\Delta m = m$ , 则  $\rho = \bar{\rho}$ , 如图 1-8 中水平实线所示。随着  $\Delta V$  逐渐缩小,  $\rho$  值将偏离  $\bar{\rho}$  值, 但在  $\bar{\rho}$  附近涨落, 即在图 1-8 中两条水平虚线间波动。当  $\Delta V$  缩小到某一值  $V_{re}$  后, 这种波动明显加剧。上述这个  $V_{re}$  称为表征元容积 (representative

elementary volume), 也称为表征体元<sup>[6,7,9]</sup>。如果  $\Delta V$  值继续缩小,  $\rho$  值的波动加大, 最终, 取决于  $P$  点的位置, 若点  $P$  在固相骨架内, 则  $\rho$  趋于  $\rho_s$ , 若点  $P$  在孔隙内的液体处, 则  $\rho$  趋于  $\rho_l$ , 若  $P$  点在孔隙内的气体处, 则  $\rho$  趋于  $\rho_g$ 。

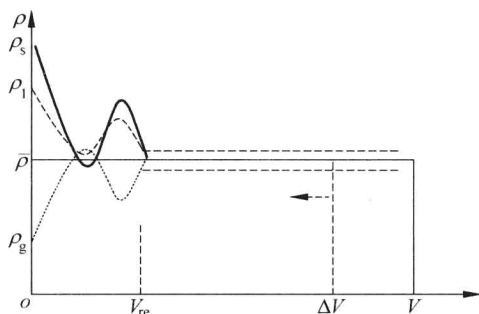


图 1-8 表征元容积

表征元容积的密度  $\rho$  实质上是组成该表征元容积的多相体系中各相组分密度的加权平均值。表征元容积的尺度对所研究的多孔材料物体的体积而言应该是足够的小, 而对多孔材料内孔隙的尺度而言应该是足够的大。

表征元容积这一概念在研究有多相多组分组成的多孔材料中有重要的作用。在材料学科内, 表征元容积被广泛应用于讨论复合材料的力学性能。这里, 我们将用表征元容积来讨论多孔材料传热传质行为。

多孔材料的常用物理量还包括由于孔隙中流体的存在而出现的诸如渗透率与质扩散率等参数。

如果说, 本小节前面介绍的关于多孔材料的新物理量是一般密实固体所不曾有的, 那么, 即便在一般密实固体中常用的诸多热物理性质(简称热物性)在多孔材料中也必须赋予新的内涵, 如比热容、导热系数等, 它们将在以后相关各章节中介绍。

## 1.2 多孔材料传热传质研究的内容与范围

多孔材料由于其组成的成分与结构不同及所处外部条件不同, 导致其内部发生的传热传质现象极不相同。但一般而言, 这些不同的现象可认为由若干基本现象综合而成。现将这些基本现象介绍如下。

### 1.2.1 热传导

热传导是多孔材料传热传质现象中最基本形式之一, 它主要(非全部, 在某些



条件下还可能处于次要地位)存在于固相骨架内。热传导现象不涉及物质的宏观迁移,热量由高温处传向低温处。热传导也称热扩散。如果多孔材料内固相骨架为各向异性,则材料的导热系数为各向异性,相应地,材料内的传热具有方向性。对于封闭型孔隙的多孔材料,例如用于隔热的泡沫塑料,其中孔隙内的流体可视为处于静止状态,这样,材料内热量的传递也不涉及物质的宏观迁移,这类多孔材料内的传热从其总体效果来看也可视为热传导,只是对材料的导热系数赋予新的含义,引入等效导热系数(effective thermal conductivity)这一新概念。以等效导热系数研究多孔材料的导热,这种方法称为等效导热系数法。该方法的关键是根据多孔材料的结构以及固相骨架与孔隙中流体的导热系数,在此基础上正确选取或建立计算等效导热系数的公式。等效导热系数法也可用于高孔隙率、低渗透率且含水率很低的多孔材料的传热过程。这里,把微弱的热对流因素折合成某种导热因素。有关等效导热系数的内容在 4.3.1 节有更详细的介绍。

### 1.2.2 渗流、热对流与对流传热

在孔隙相互连通的多孔材料内,当相邻孔隙内流体的压力不相同时,流体会从高压处流向低压处。对于有效孔隙率低的材料,其渗透率很低,流体的流动速度很缓慢。流体在孔隙间的缓慢流动称为渗流,渗流服从达西定律,通常用雷诺数  $Re \leq 1.0$  作为判断渗流的条件<sup>[6]</sup>。例如,孔隙直径  $d = 30 \mu\text{m}$ (参见图 1-5 中细胞腔的尺度),孔隙中空气的运动粘度  $\nu = 14.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,取雷诺数  $Re = 1.0$ ,则按雷诺数  $Re$  的定义式可得空气渗流的极限速度  $w$  为

$$w = Re \frac{\nu}{d} = \frac{1.0 \times 14.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}{30 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 0.5 \text{ m/s}$$

若在此多孔材料内空气的流动速度不大于  $0.5 \text{ m/s}$  即为渗流;若孔隙中为液相水,液相水的运动粘度  $\nu = 1.01 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,则水的渗流极限速度为  $w = 3 \text{ cm/s}$ 。

由于渗流的流动速度很小,孔隙内的流体几乎处于静止状态,因此,多孔材料内固相骨架与流体接触处固体与流体之间的温度差别很小,可以假定为相同,称为局部热平衡。

随着流体的渗流,也将其携带的能量由高压处传输到低压处,这种能量传输称为热对流。在流体热对流过程中,由于温度差别而引起热传导也同时存在于流体内。在某些条件下,如高含水率,流体的导热系数大于固相骨架导热系数,流体中的热传导也可能超过固相中热传导,在讨论诸如高含水率材料干燥时,必须考虑到水中的导热。但在低含水率条件下,孔隙中流体的热传导总是小于固相骨架热传导,处在热压过程中的木材人造板大都属于这种情形。

当材料处于高温气流环境中,高温的气流向低温的材料表面传输热量,这种传热方式称为表面对流传热,简称对流传热。同样,相反的情形,高温的材料表面向低温的气流传输热量,也是对流传热。就引起流体流动的原因而论,对流传热可区分为自然对流与强制对流两类。自然对流是由于流体内部各部分的密度不同而引起的流体的流动,而强制对流则是由诸如鼓风机、水泵等设备强制产生的流体流动。

热对流与对流传热的差别是,前者是指流动流体内部由于流动引起的热量传输而后者是指流动流体与其相接触的固体表面间由于温度不同引起的热量传输。

### 1.2.3 质扩散与对流传质

对照热扩散,将不涉及物质宏观迁移而由物质密度差引起的质量传输称为质扩散,它发生在有多种物质共同存在的体系内。若多孔材料孔隙内存在两种气体(常见的是水蒸气与干空气),以水蒸气为例,当材料处于加热过程时,其中的水蒸气质量会因为相变(水蒸气凝结或液相水蒸发)而改变,由此引起多孔材料内水蒸气密度分布的改变,形成水蒸气密度梯度。水蒸气密度梯度将引起水蒸气的质量迁移,即质扩散。多孔材料内的空气,在材料加热过程中,也存在空气密度梯度,引起空气的质量扩散。上述认识也常用于多孔材料内的液相水。例如,含水多孔材料在干燥过程中,其中液相水的迁移常被认为经历着渗流或扩散。材料表面与静止环境之间也会因为水蒸气密度差而产生水蒸气的质扩散。例如,湿的衣服在静止空气环境中被晾干,就是衣服中的水分以水蒸气形式经历了从衣服表面到环境的质扩散过程。通常,将密度梯度驱动的质量迁移称为扩散,而将压力梯度驱动的质量迁移称为流动或渗流。

对照对流传热,水蒸气从密度高的流动的湿空气(物质宏观迁移)向密度低的湿材料表面传输的过程(在湿表面上水蒸气凝结)称为表面对流传质,简称对流传质。同样,相反的情形,水蒸气从高密度的湿材料表面向低密度的湿空气流传输质量的过程(在湿表面上液相水的蒸发)也是对流传质。当含水的多孔材料被流动的湿空气加热时,多孔材料表面的水蒸气密度大于湿空气中水蒸气密度,在空气气流带动下,把大量水蒸气从材料表面带到环境中,使材料干燥,这是对流传质典型的例子,诸如木材、谷物、食品这样的含水多孔材(物)料干燥工艺正是根据对流传质原理设计的。

对流传质与质扩散的基本区别是,质扩散发生在相对静止的环境内,如,多孔材料内部,或材料表面与静止环境之间,质扩散不涉及物质的宏观迁移(如流动);对流传质则发生在静止的材料表面与流动的流体之间。

1.2.2节中提及的热对流其实也伴随着质量的宏观迁移,我们在以后讨论中

并不把它称为质对流,以免与本节提及的对流传质混淆。

#### 1.2.4 材料内水蒸气凝结与液相水蒸发

水蒸气凝结成液相水或液相水蒸发成水蒸气的相变行为不仅发生在材料表面,有时也发生在多孔材料内部。多孔材料孔隙内湿空气中的过热水蒸气在渗流过程中,若从高温处流向低温处,过热的水蒸气遇到温度较低的固体骨架,水蒸气温度可能降到相应地饱和温度,过热水蒸气中的一部分将凝结成水成为湿饱和水蒸气,其中液相的水或被固相骨架所吸收或停留在固相骨架与孔隙的交界面上。相反,由于材料被加热及孔隙间流动等因素,使孔隙中吸着在固相骨架内的液相水被蒸发成水蒸气,并以水蒸气形式停留在孔隙中或向邻近的孔隙迁移。

#### 1.2.5 毛细管现象与吸附现象

多孔材料与一般密实固体材料的区别之一是,多孔材料内含有尺度不同的大量孔隙,且孔隙中存在固-气、液-气及固-液交界面。处在孔隙内的液-气交界面上的液体表面呈弯曲状,引起毛细管现象。这种毛细管现象对多孔材料内水分贮存及传输的形式起着十分重要的作用。

图 1-9(a)所示为直径由大至小毛细管现象。由图(详见表 5-2 和表 5-3)可知,毛细管力与毛细管直径呈反比。这样,尺度不同且相互连通的孔隙犹如直径不同的毛细管网络。因此,含水的多孔材料也常被称为毛细管材料。由于毛细管直径不同(孔隙尺寸不同),引起毛细管力的差别,这种毛细管力的差别将驱动液相水流动。此外,由于液面弯曲引起液面上饱和水蒸气压力随毛细管直径而变化。毛细管直径越小,凹型液面对应的饱和水蒸气压越低。这一特点直接影响着液相水蒸发的条件及水的存在形式,它是吸湿性多孔材料存在吸着水及平衡含水率的物理基础。同时,它会直接影响水分的迁移行为。

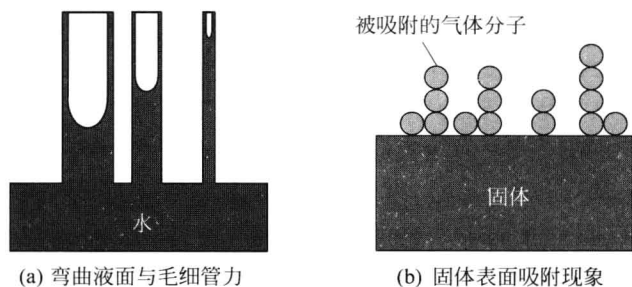


图 1-9 液体表面与固体表面

多孔材料与一般密实固体材料另一个大的区别是,多孔材料内有很大的表面积,如表 1-4 所示,在  $1\text{ cm}^3$  微小的体积内可具有几百甚至上千  $\text{m}^2$  的表面。这一特点使多孔材料具有吸湿(吸附水蒸气)能力,图 1-9(b)示意了固体表面对环境气体的吸附现象,环境中的水蒸气被吸附成化合水(化学吸附)与吸着水(物理吸附)。这种被吸附的水具有比通常的自由水更高的能量,因此,蒸发吸着水比蒸发自由水要困难。更多有关内容请详读 5.1 节、6.1 节及 6.2 节。

### 1.2.6 液相水与水蒸气的热力学平衡与非平衡

共处同一密闭而与环境绝热的容器内的液相水与水蒸气在达到动态平衡(简称平衡)时,液相水与水蒸气具有相同的温度及相同的压力,其交界面上没有净质量交换,容器内的水蒸气达到饱和状态。饱和状态下水蒸气压力与温度彼此不再独立,它们的关系满足克劳修斯-克拉贝隆(Clausius-Clapeyron)方程<sup>[19]</sup>,近似地可表述为

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_s = \frac{\gamma}{T_s} \frac{M_v p_{sv}}{RT_s} \quad (1-2-1)$$

此式表示,饱和水蒸气压力  $p_{sv}$ 、饱和温度  $T_s$  与汽化潜热  $\gamma$  之间存在一一对应关系。在已知  $\gamma$  条件下,  $p_{sv}$  与  $T_s$  一一对应,并近似地表述成如下解析形式<sup>[15]</sup>:

$$P_{sv} = \exp\left(53.421 - \frac{6516.3}{T_s} - 4.125 \ln T_s\right) \quad (1-2-2)$$

图 1-10(a)表示液相水与水蒸气共处同一密闭容器,若温度为  $20^\circ\text{C}$ ,液面上的水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  等于  $20^\circ\text{C}$  相应地饱和水蒸气密度  $\rho_{sv}$ ,即  $\rho_{v,s} = \rho_{sv} = 0.017\text{ kg/m}^3$ ,密闭容器内气相空间(小环境)水蒸气密度  $\rho_{v,e}$  也等于  $20^\circ\text{C}$  相应地饱和水蒸气密度  $\rho_{sv}$ ,  $\rho_{v,e} = \rho_{sv}$ ,相对湿度  $\varphi = 1$ 。图 1-10(b)表示液相水与水蒸气共处一个有小缝隙的容器,外部大环境的相对湿度小于 1,  $\varphi = 0.7$ 。作为一种近似处理,仍认为容器内的液相水与水蒸气处于相平衡,小环境的相对湿度仍为 1,而容器内的小环境与容器外的大环境不再平衡。容器内的小环境不断向外部大环境迁移水蒸气,迁出的水蒸气由液相水补偿。图 1-10(c)表示液相水与水蒸气共处一个敞开的容器。同样作为一种近似的处理,认为容器内的小环境与容器外的大环境处于平衡,相对湿度相同且小于 1,都是  $\varphi = 0.7$ ,容器内的液相水表面上的水蒸气与容器内小环境的水蒸气不再平衡,  $\rho_{v,s} \neq \rho_{v,e}$ 。一方面,水面上的水蒸气不断向小环境迁移;另一方面,液相水在水面上不断地转化为饱和水蒸气。

含水多孔材料中水与水蒸气的相平衡,即材料内部小环境中液相水与水蒸气之间的相平衡以及材料内的小环境与包围材料的大环境之间的相平衡,这些平衡

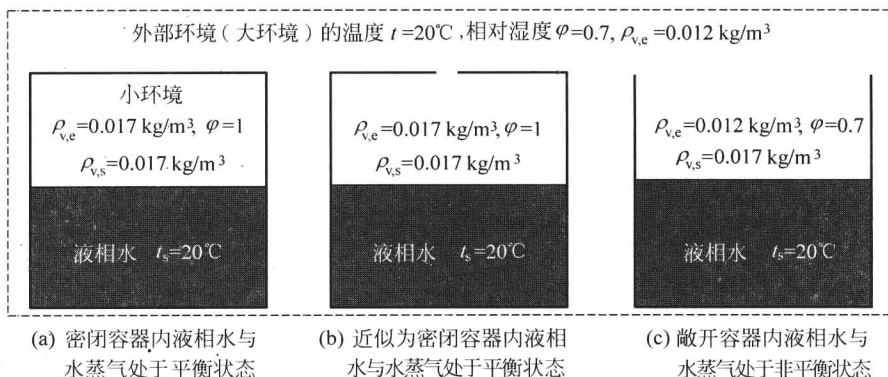


图 1-10 密闭与敞开空间内液相水与水蒸气的平衡关系

关系与材料结构形式密切相关。下面仍以木材结构为例，对其内部水分向环境迁移（干燥）过程予以说明<sup>[16]</sup>。木材在干燥过程中其细胞内水的存在形式及液相水与水蒸气相平衡关系由图 1-11 表示，它是参阅图 1-5 木材细胞结构得到的，是胞管细胞壁与细胞腔的横截面图。在以下讨论中要注意大环境（包围着木材）与小环境（细胞腔内气相空间）的联系。

图 1-11(a) 表示木材在水中浸泡足够长时间，即木材被湿透后的情形。细胞腔内充满水（图中细胞腔内都是黑色），此情形为木材细胞处于水饱和状态。细胞腔内只有自由水，没有水蒸气。在多孔介质传热传质学中称为湿饱和和多孔介质。这里，“饱和”一词既包含水的填充程度同时也包含着热力学状态。

当图 1-11(a) 所示湿透的木材细胞被干燥时，即大环境的相对湿度小于 100% 时，细胞腔内的水蒸气会不断迁出，腔内自由水减少，水位下降，细胞腔成为液相水与水蒸气共存的空间，如图 1-11(b) 所示（细胞腔的黑色部分表示被自由水占有，另一部分只有黑色点滴以表示水蒸气）。腔内的液相水与水蒸气处于相平衡状态，水蒸气密度为对应于细胞温度下的饱和水蒸气密度，也即，细胞腔内湿空气的相对湿度为 100%。此阶段，细胞壁内吸着水的含量仍然是饱和的（细胞壁内孔隙填满黑色），与图 1-11(a) 相比没有丝毫变化。细胞腔内小环境的水蒸气与材料外部大环境的水蒸气处于非平衡状态[对应于图 1-11(b)]。这种液相水填充部分孔隙的情形在多孔介质传热传质学中称为非饱和和多孔介质。如果将外部大环境的相对湿度提高到 100%，水蒸气为饱和水蒸气，在这种假设性条件下，细胞腔内的自由水不会再蒸发，自由水的质量不会继续减少，干燥过程也就停止了。

图 1-11(c) 表示当木材细胞在图 1-11(b) 基础上继续被干燥（大环境的相对湿

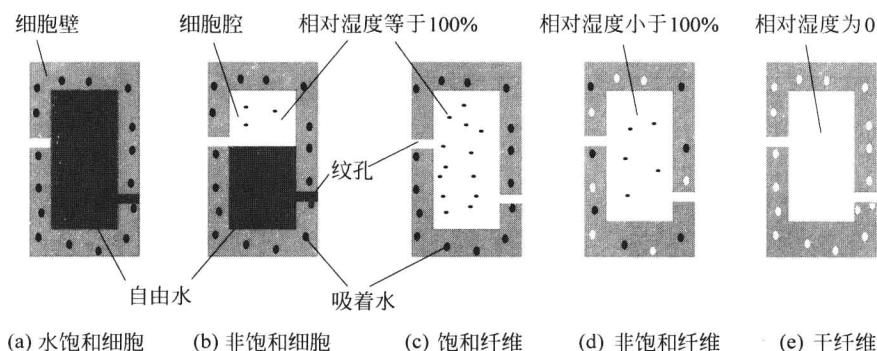


图 1-11 木材细胞内各种含水状态

度小于 100%), 且达到某一状态, 在此状态下, 细胞腔内自由水全部被迁出而细胞腔内相对湿度仍为 100% [图 1-11(b) 的极限情形], 细胞壁内吸着水仍将保持原始值。此状态下的木材含水率称为纤维饱和点。

若木材在图 1-11(c) 基础上继续被干燥到另一个状态, 则大环境的相对湿度与小环境的相对湿度相同, 细胞腔内水蒸气密度与木材含水率 (细胞壁内吸着水量) 相应地下降到另一个状态, 如图 1-11(d) 所示。在这个状态下, 细胞腔内水蒸气密度与木材含水率达到平衡, 此平衡的木材含水率称为平衡含水率。在一定温度与压力条件下, 平衡含水率只取决于细胞腔内 (也是包围木材的大环境) 湿空气相对湿度。平衡含水率的最大值即为纤维饱和点。

若按理想的条件, 改变外部大环境相对湿度直至为 0, 则细胞腔内的水蒸气密度与压力也降为 0, 如图 1-11(e) 所示, 在此状态下, 木材干燥到绝干状态。应该说, 这里提及的绝干状态只是一种理想的极限条件, 现实中并不存在。实际情形是, 当环境相对湿度降到接近 0 时, 木材含水率仍有 1%~2%。

请读者注意, 图 1-11(b) 所示为非饱和细胞, 图 1-11(d) 所示为非饱和纤维。

关于纤维饱和点以及含水率处于纤维饱和点以上或以下不同的液相水与水蒸气相平衡关系, 在研究诸如木材等含水吸湿性多孔材料传热传质中至关重要。

综上所述, 1.2.1 节~1.2.6 节介绍了发生在多孔材料内部几种基本传热传质现象。而这些现象与材料结构特征及相应地热物性紧密相关。因此, 研究多孔材料热物性也就成为研究多孔材料传热传质重要组成部分。

### 1.3 多孔材料传热传质问题的数值研究方法

“多孔材料传热传质及其数值分析”实质上是把计算传热传质学应用于多孔材料这一领域。

计算传热传质学是自 20 世纪 70 年代以来随着计算机科学发展而诞生,发展,并日趋完善的一门新兴学科,是研究多孔材料传热传质问题重要手段之一。它与传统的实验方法,与以微积分理论为基础的解析求解的理论研究方法相辅相成,成为当今传热传质这一领域重要分支之一。它以工程实际中存在的大量传热传质问题为研究对象,将其演绎成恰当的数学问题,并对此数值求解,最终以数学问题的数值解作为对实际问题的回答。为了说明它在研究方法上所具有的特点,不妨将它与实验研究方法、分析求解的理论研究方法进行对比。

传统的实验研究有两种。一种是在研究对象的原型上进行,也就是在原型实际设备与过程中直接对研究对象的相关参数进行测量或数据采集,并对测量与采集的数据加以整理与分析找出规律性结果。另一种则是在研究对象的模型上进行,也就是在认识原型现象基础上,根据物理相似性原则,设计模型,在实验室建立模型设备以模拟原型的条件,在模型设备上进行测量与数据采集及整理,以此获得的数据将代表原型的参数,并可把在模型上研究所得结果推广到原型中去。这种通过模型进行研究的方法常称物理方法,相应地模型称为物理模型。这种借助于模型的实验研究方法往往具有实验时间短、耗资少等优点而被科学界与工程界广泛采纳。

与实验研究方法相对应的是理论研究方法,它可扼要地用图 1-12 表示。

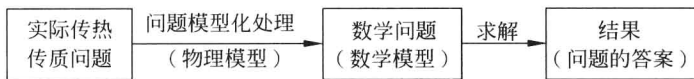


图 1-12 理论研究方法示意图

理论研究方法与实验研究方法的出发点是相同的,都是实际的传热传质问题,如第一个方框所示。接下来的步骤分别在下面几个小节中介绍。

#### 1.3.1 实际问题模型化

处理实际问题的第一步,是对实际问题作模型化处理。这是因为实际问题往往相当复杂,在保证实际问题基本特征不变条件下作适当的简化是完全必要的。



这里,保证实际问题基本不变是前提,在这个前提下的简化过程称为模型化过程,也称为建立实际问题的物理模型。例如,用作隔热材料的泡沫塑料,在分析其中传热过程时,由于材料中孔隙是封闭的,孔隙内流体在传热过程中被视为静止,从宏观上看,把含有大量封闭型孔隙的泡沫塑料视为一种性质均匀的密实固体材料。这种密实固体就是泡沫塑料的模型。又如,把结构复杂的木材视为毛细管多孔材料,这毛细管多孔材料就是木材的物理模型。表 1-2 所列的多孔材料分类,实质上就是对繁多多孔材料进行了模型化处理。除了对材料作模型化处理外,也可对过程作模型化处理。例如,若多孔材料内的孔隙相互连通,则当材料在被加热时,孔隙间的流体就会流动,如果流动速度缓慢,可认为这种流动服从达西定律,这就是多孔材料内流动过程的物理模型。又如,把多孔材料在实际工作中的各种外部加热条件归结为如图 2-1 所示的对流加热与热板接触加热;把环境对材料的辐射加热折合成对流加热;把温度不完全均匀的热板对材料的加热视为温度均匀的热板对材料的加热过程,凡此种种都是对实际问题的模型化处理。对实际问题进行模型化处理过程就是建立实际问题物理模型的过程。

在建立物理模型时,要对实际问题所涉及的物理现象、支配这些物理现象的基本规律有正确的认识。在建立物理模型过程中要兼顾以下两方面的平衡。一方面,模型要尽可能保持原型问题的真实性;另一方面,要考虑到下一步数学描述与求解的可能性。

### 1.3.2 物理模型基础上的数学模型

第二步,对已经作模型化处理的问题进行数学描述。也就是,在物理模型基础上建立数学模型。一般而言,视原问题及所建物理模型复杂程度不同,相应地数学模型繁易程度也不同。例如,若多孔的泡沫塑料中的孔隙都是封闭的,这样,把这一泡沫塑料视为密实的固体材料。在这一物理模型基础上,当讨论该材料加热时,其传热数学模型就简单些,可以归纳为一个关于温度的偏微分方程问题(热传导方程与相应地定解条件)。如果孔隙均匀地分布,则上述固体材料被认为是均匀材料。在这进一步简化的物理模型基础上,上述偏微分方程则为常系数热传导方程。再如果,材料的尺寸比较小,材料与外部环境的温度差别较小,且传热过程缓慢,上述偏微分方程又可简化为常微分方程。相反,若物理模型不断地趋于复杂,相应地数学模型也就不断地趋于复杂。例如,上述多孔材料内的孔隙是连通的,把孔隙内气体流动服从达西定律视为物理模型,则当材料被加热时,其传热传质数学模型就复杂些,该模型涉及温度、气体压力、密度与速度的偏微分方程组问题(含热传导与热对流的能量守恒方程、气体质量守恒方程、气体状态方程以及相应地定解条件)。

总之,建立在物理模型基础上的数学模型就是用一个数学问题来代表一个实



际问题,如图 1-12 中的第二个方框所示。

在日常研究工作中我们还常遇到这样的情形,即把实验中(原型实验或模型实验)采集的数据经分析与整理后得到规律性的结果表示成某一数学公式并称此公式为数学模型。应该说,这是另一类的数学模型,称其为统计数学模型。建立在物理模型基础上的数学模型则称解析数学模型或机理数学模型。本书的重点是解析数学模型。

在实际工程应用中,常见的一种数学模型是,把解析数学模型与统计数学模型结合起来。例如,反映木材内平衡含水率与环境相对湿度关系的辛普森(Simpson)公式<sup>[20]</sup>[见式(6-1-13)],就是把在固体表面吸附理论上建立起来的物理模型与实验结果的统计模型结合而成的数学模型。

近年来,在数值计算发展中,人们也把 1.3.3 节将要介绍的控制容积法作为建立数学模型的基本方法。

在对复杂物理过程建立数学模型时应由简入手,从简到繁,逐步逼近实际。

### 1.3.3 求解数学模型

第三步,对数学模型求解。多孔材料传热传质问题经常讨论到材料内部某一参数(如温度或含水率)或相互耦合的诸多参数(如温度、含水率、气体压力与速度等)的分布及其随时间的变化。涉及这类分布函数随时间变化的问题(两个以上自变量)大都是单个偏微分方程或包含多个偏微分方程的偏微分方程组问题。对它们的求解主要由分析解法与数值解法。

分析解法也称解析解法,是求解偏微分方程的一种经典方法。它以数学分析为基础求解偏微分方程问题,得到以函数形式表示的解。这个函数表示着材料内某一参数(如温度或含水率)的分布。分析解法又分精确分析解法与近似分析解法。精确分析解是指函数形式的解在求解域内逐点精确地满足原微分方程定解问题,而近似分析解所得到的函数形式在求解域内每点处只是近似地满足原微分方程定解问题。这种分析求解数学模型的方法就是前面提及的分析求解的理论研究方法。

分析解法的优点是,解的最终形式是解析函数,它能清晰地揭示参与过程各相关物理量之间的内在联系。不足之处是,能用解析法求解的实际工程问题非常有限。对诸如多孔材料内有水分迁移的传热传质问题,就显得无能为力。由此,解析的方法只适用于求解相对比较简单数学模型。值得一提的是,用解析方法求得的解常常可以作为同一问题用数值计算方法所得到结果正确与否的检验。

20 世纪 50 年代之后,随着计算机技术的迅猛发展,数值计算方法越来越成为计算复杂数学问题的重要方法。在数值计算方法中又以有限差分法与有限单元法

最受关注。有限差分法是1910年问世,1950年以后才逐渐成熟的;有限单元法则是1950年以后兴起的。它们都是随着计算机科学的发展而发展起来的。有限差分法与有限单元法都是求解微分方程的近似方法,在功能上各有千秋。针对诸如多孔材料结构比较复杂,传热传质并存的非稳态问题,采用有限差分法更具灵活性。本书只介绍用有限差分法求解相关数学模型。

用有限差分法求解问题的基本要点是,将原微分方程问题转换成代数方程问题,也就是,将微分方程形式的数学模型转换成代数方程形式的数学模型。求解代数方程所得到的解被认为是微分方程的近似解。

在代数方程建立方面常有两种途径。其一,从微分方程出发,用差分代替微分,用差商代替微商,将微分方程转换成差分方程,即代数方程组(代数方程形式的数学模型)。其二,在讨论的区域(多孔材料)内取控制容积(单元)。针对此单元,根据已建立的物理模型,建立代数方程,也即代数形式的数学模型。特别值得一提的是,这里的控制容积(单元)与1.1.3节中的表征元容积是一致的,也就是,控制容积(单元)即为表征元容积。本书将使用上述两种方法来建立相应的代数形式数学模型。

关于代数方程形式数学模型的解是否就是微分方程形式数学模型的近似解的问题将在1.3.5节应用举例及第2章中讨论。

对复杂数学问题的求解还有一种物理的方法曾经被人们广泛应用,如电热模拟法、水热模拟法等。在电热模拟法中,用电压(或水位)代表温度,用测量电压(或水位)的分布来代替对温度分布的求解。这类物理方法在电子计算机尚未被广泛应用之前曾经是求解复杂数学问题的重要方法。

#### 1.3.4 求解结果显示

第四步,求解结果显示。数值计算方法求解得到的是代数方程的解,也即,其结果是大量离散的数据,这些数据的值正是数学模型的解,如图1-12中第三个方框。数据的原始形式一般贮存在若干数组内,利用这些数组中的数据可绘制成相应地曲线或图表以示求解数学模型的结果。在计算机可视化技术推动下,将这些数据以动画的方式表现在计算机屏幕上,以显示似乎真实的物理过程。

综上所述,计算传热传质学的研究方法是用数学问题去模拟实际问题,用数学问题的解去模拟真实的过程,加上计算机可视化技术,仿佛可将真实过程显示出来。因此,这种方法也称为数值仿真。

与传统实验方法从实测中获得数据相比,计算传热传质学则是用数值计算方法来获得数据。相应地,这种方法又被称为数值实验。由于数值实验是在一台计算机上实施的,显然具有成本低且效率高的优点。特别是,它可以获得更多在实验

中难以获得的信息,例如,利用数值计算可以提供木材人造板在加工过程中其内部含水率的分布以及这一分布随时间的变化,而它们至今仍难以用实测方法获得。数值实验还可以模拟在实验中难以实现的条件,例如过高的温度、有毒的环境等。

### 1.3.5 应用举例

本小节以举例方式说明实验研究方法与理论研究方法,以及理论研究方法中解析解法与数值解法的联系。

#### 1.3.5.1 问题的表述

用热电偶测量气流的温度是人们熟悉的一种测量方法,如图 1-13 所示。若管道内流动着温度  $t_a = 200^\circ\text{C}$  的空气,流动速度  $u = 10\text{ m/s}$ ,将结点直径  $d = 5\text{ mm}$  的裸露铜-康铜热电偶置于管道中央,需经多长时间,热电偶测量的温度基本上代表了空气流的真实温度?

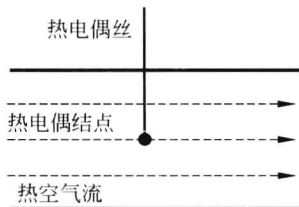


图 1-13 热电偶测量气流温度

#### 1.3.5.2 问题的回答

回答此类实际问题有两种途径。

途径一,实验的方法。实际记录热电偶从初始温度  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  开始的逐渐升温过程直至测量指示的温度基本不变,同时记录这一段所需的时间。

途径二,理论的方法。经历如图 1-12 所示如下几个步骤。

(1) 实际问题模型化,也即,建立物理模型。具体地讲,引入若干合理而简化的假定。针对本问题,假定 1,热电偶的结点其几何形状是一个球,体积为  $V$ ,表面积为  $A$ ;假定 2,在分析气流与热电偶传热时,忽略热电偶丝的存在;假定 3,忽略热电偶与气流管壁之间的辐射热交换;假定 4,热电偶结点内部的物理性能,如材料密度  $\rho$ 、比热容  $c$  等是均匀的;假定 5,热电偶结点内部的温度  $t$  始终是均匀的,也即,传热的集总参数模型<sup>[21]</sup>。

(2) 在物理模型基础上建立数学模型,将实际问题表示成数学问题。根据能量守恒的原则可得到如下常微分方程及相应地初始条件:

$$\rho c V \frac{dt}{d\tau} = hA(t_a - t) \quad \tau > 0 \quad (1-3-1)$$

与

$$t = t_0 \quad \tau = 0 \quad (1-3-2)$$

由式(1-3-1)与式(1-3-2)构成关于因变量为温度  $t$  自变量为时间  $\tau$  的常微分方程初值问题。上述数学问题的物理含义是,将初始温度  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  的热电偶插入温度  $t_a = 200^\circ\text{C}$  气流后,热电偶的温度将升高,在温度升高过程中,始终遵循能量守恒原则,表现为,热空气流对热电偶在单位时间内以对流加热方式所提供的热能[式(1-3-1)等号右边]等于单位时间内热电偶能量的增加[式(1-3-1)等号左边]。式中  $h$  是空气流对热电偶结点的对流传热表面传热系数 [ $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ]。

为便于运算,将上述方程写成无量纲形式。为此,引入无量纲温度  $\theta$  与时间常数  $\tau_c$  两个变量:

$$\theta = \frac{t - t_0}{t_a - t_0}, \quad \tau_c = \frac{\rho c V}{h A} \quad (1-3-3)$$

将式(1-3-3)代入式(1-3-1)与式(1-3-2),使它们成为

$$\frac{d\theta}{d\tau/\tau_c} + \theta = 1 \quad \tau > 0 \quad (1-3-4)$$

与

$$\theta = 0 \quad \tau = 0 \quad (1-3-5)$$

至此,由式(1-3-4)与式(1-3-5)构成本问题的数学模型,这是一个常微分方程初值问题。

(3) 求解数学模型,即求解上述常微分方程初值问题。解析法与数值法是求解微分方程问题两种最常见的方法。

解析法:用解析法求解上述常微分方程初值问题的思路是,先求式(1-3-4)所对应的齐次方程的一般解,再求非齐次方程的一个特解,两者之和构成问题的一般解,再由初始条件确定一般解中的常数,从而得到初值问题的最终解,表示如下:

$$\theta = 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} \quad (1-3-6)$$

数值法:用数值法求解上述常微分方程初值问题的思路是,先将对时间连续区域的微分方程转变成时间离散点上的代数方程。为此,将式(1-3-4)改写成如下代数方程形式:

$$\tau_c \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta\tau} + \theta^n = 1 \quad (1-3-7)$$

式中  $\theta^{n+1}$  与  $\theta^n$  表示当前时刻与前一时刻的无量纲温度,两个时刻的差为时间步长

$\Delta\tau$ 。将式(1-3-7)与式(1-3-5)整理后为

$$\theta^{n+1} = \theta^n \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\tau_c}\right) + \frac{\Delta\tau}{\tau_c} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1-3-8)$$

与

$$\theta^n = 0 \quad n = 1 \quad (1-3-9)$$

将式(1-3-9)代入式(1-3-8)后,上述式(1-3-8)等号右边均为已知的量,由此可求得等号左边  $\theta^{n+1}$  的值。也就是说,已知  $\theta^n$  的值,由式(1-3-8)即可求得  $\theta^{n+1}$  的值,  $n=1, 2, \dots$ 。上述不断由  $\theta^n$  求得  $\theta^{n+1}$  的值,由此形成的  $\theta$  值的数列,即为上述常微分方程初值问题的数值解,也是微分方程的近似解。

(4) 求解结果的显示,也即,把上述常微分方程初值问题的解析解式(1-3-6)与由式(1-3-7)求得的数值解结果表示在图 1-14 上。图中用主坐标轴表示无量纲时间(相对时间)  $\tau/\tau_c$  与无量纲温度(相对温度)  $\theta$  的关系。

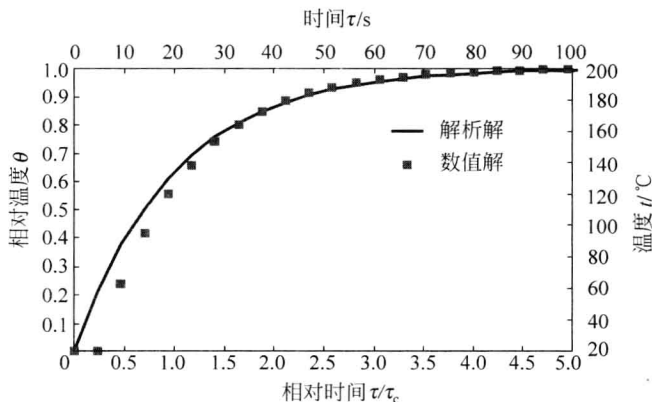


图 1-14 数学问题求解的结果

图 1-14 中光滑的曲线表示解析解,离散点表示数值解。由图可见,两者之间除了在开始阶段有较大差别之外,随时间推延这种差别越来越小。计算实践表明:代数方程式(1-3-8)的解逼近由式(1-3-6)表示的微分方程的解。

为了更清楚地了解热电偶温度随时间的变化,要求将上述结果表示成有量纲的曲线,为此,将式(1-3-6)写成有量纲的如下形式:

$$t = t_0 + (t_a - t_0) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right) \quad (1-3-10)$$

同时,将由式(1-3-7)求得的无量纲数值结果转换成有量纲的量。这样,将式(1-3-10)计算得到的结果与有量纲的数值解结果绘制在图 1-14 的次坐标轴上,表示成温度  $t$  与时间  $\tau$  的定量关系。

在表示有量纲的时间  $\tau$  与温度  $t$  关系时,必须求得式(1-3-3)中时间常数  $\tau_c$ 。 $\tau_c$  的量纲是时间,其物理含义为热电偶的热容量  $\rho c V$  与热电偶在空气流中传热热阻  $1/(hA)$  的乘积。为求得  $\tau_c$ ,需知道如下参数:热电偶材料的密度  $\rho(8900 \text{ kg/m}^3)$  与比热容  $c[384 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}]$ ,热电偶结点体积  $V$  与面积  $A$  之比  $V/A(d/6)$ ,还需求热空气流对小球的对流传热表面传热系数  $h$ 。它通过如下传热公式<sup>[22]</sup>求得

$$Nu_d = 2 + (0.4Re_d^{1/2} + 0.06Re_d^{2/3})Pr^{0.4} \quad (1-3-11)$$

式(1-3-11)中的雷诺数  $Re_d$ ,按其定义为

$$Re_d = \frac{ud}{\nu} = \frac{10 \text{ m/s} \times 0.005 \text{ m}}{35 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1429$$

上式中的  $\nu$  是空气在  $200^\circ\text{C}$  条件下的运动粘度。此条件下的普朗特数  $Pr=0.685$ 。将  $Re_d$  与  $Pr$  的值代入式(1-3-11),可得

$$Nu_d = 2 + [0.4(1429)^{1/2} + 0.06(1429)^{2/3}](0.685)^{0.4} = 21.53 \quad (1-3-12)$$

按  $Nu_d$  的定义,可得对流传热表面传热系数  $h$  为

$$h = Nu_d \frac{\lambda}{d} = 21.53 \times \frac{0.039 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}}{0.005 \text{ m}} = 168 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)} \quad (1-3-13)$$

上式中的  $\lambda$  是空气在  $200^\circ\text{C}$  条件下的导热系数。将式(1-3-13)求得的  $h$  的值以及相关参数  $\rho$ 、 $c$  与  $V/A$  的值代入式(1-3-3),可得时间常数  $\tau_c$  为

$$\tau_c = \frac{\rho c V}{h A} = \frac{\rho c d}{6 h} = \frac{8900 \text{ kg/m}^3 \times 384 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times 0.005 \text{ m}}{6 \times 168 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}} = 17 \text{ s}$$

由式(1-3-6)及对照图 1-14 可知,当  $\tau/\tau_c=3$  时,  $\theta=0.95$ ,即当热电偶插入气流的时间为约 50 s 后,热电偶指示的温度为  $t=190^\circ\text{C}$ ,表示热电偶的测量误差为 5%;当  $\tau/\tau_c=5$  时,  $\theta=0.99$ ,也即当热电偶插入气流的时间为约 1.5 min 后,热电偶指示的温度为  $t=198^\circ\text{C}$ ,表示热电偶的测量误差为 1%。

习 题

1-1 如图 1-15 所示,边长为  $L$  的立方体密实固体,内含高度为  $H$  的正方形孔隙槽道,这是构成某多孔材料的基本单元。多孔材料正是由这种基本单元均匀、整齐、有序而无缝隙地堆积而成。

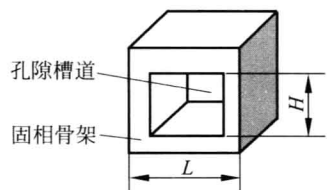


图 1-15

- (1) 试求表 1-5 中所列  $a, b, c, d$  四种情形下多孔材料的孔隙率  $\phi$  与体积比表面积  $A_v$ 。
- (2) 若固相骨架的密度  $\rho_s = 1200 \text{ kg/m}^3$ , 试求上述四种情形下多孔材料的密度  $\rho$  (也称容积密度、表象密度、名义密度、绝干密度、容重等) 及质量比表面积  $A_m$ 。
- (3) 在孔隙槽道内填充有水且液相水饱和度  $S_l$  分别为 100%、50% 与 10% 条件下, 试求上述四种情形下多孔材料的含水率  $W$ 。水的密度  $\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$ 。
- (4) 将上述计算结果填入表中, 观察与分析多孔材料结构对孔隙率、比表面积、密度、含水率等宏观参数的影响。

表 1-5

参 数	$a$	$b$	$c$	$d$
$L$	$40 \text{ }\mu\text{m}$	$2 \text{ }\mu\text{m}$	$10 \text{ nm}$	$4 \text{ nm}$
$H$	$30 \text{ }\mu\text{m}$	$1 \text{ }\mu\text{m}$	$5 \text{ nm}$	$2 \text{ nm}$
$\phi$				
$A_v / (\text{m}^2 / \text{cm}^3)$				
$A_m / (\text{m}^2 / \text{g})$				
$\rho / (\text{kg} / \text{m}^3)$				
$W (S_l = 100\%)$				
$W (S_l = 50\%)$				
$W (S_l = 10\%)$				

- 1-2 习题 1-1 中孔隙槽道的尺寸在整个多孔材料内是均匀的。如果孔隙槽道的尺寸不均匀,这种不均性可能是原始材料所固有,例如,孔隙槽道尺寸的分布呈正态分布。在此条件下,如何寻求孔隙率、比表面积、材料名义密度等宏观参数。孔隙槽道尺寸的不均匀性也可以是人为造成,例如,多孔材料在生产过程中承受加热与加压,孔隙尺寸将显著变化,由此造成不均匀分布,在这样条件下,又如何寻求孔隙率、比表面积、材料名义密度等宏观参数。
- 1-3 关于体孔隙率等于面孔隙率的假定你认为合理吗?试问在何种条件下近似合理,在何种条件下极不合理。
- 1-4 如图 1-16 所示为一多孔材料平板内温度分布,它是一条直线。(1)多孔材料内贮存干空气且孔隙是封闭的,即孔隙之间不连通。试定性地画出干空气压力与密度的分布曲线。(2)孔隙间是连通的,且不计材料与环境之间有任何质量迁移与交换,定性地画出干空气压力与密度的分布曲线。对比两种情况(孔隙封闭与连通)下干空气压力与密度的情形有何不同?为什么?
- 1-5 在室温条件下有 A、B 两块含水率不同的木头。A 的含水率为 12%,可理解为 A 在对应环境下已达到平衡含水率水平,B 的含水率为 60%。现将这两块木头同时放入高温高湿蒸汽锅内,温度接近 90℃,相对湿度几乎 100%。两块木头长时间处在这样高温高湿环境下,它们的温度几乎与环境温度完全相同;它们的含水率,A 木头由 12% 上升了,而 B 木头反而下降了。试分析 A、B 木头含水率上升与下降的原因。
- 1-6 为什么说多孔材料中水的饱和度与热力学中饱和水是两个完全不同的概念。
- 1-7 湿的衣服晾在有空气流动的环境中比静止空气环境要干得快,这是为什么?人从 30℃ 水温的游泳池中突然走到 38℃ 空气环境中,当微风吹来,人不仅不觉得温暖反而会感到一阵凉气,甚至哆嗦。为什么?
- 1-8 你是怎样认识“物理模型”所包含的内容,请根据你的认识举例说明什么是物理模型。
- 1-9 你是怎样认识“数学模型”所包含的内容,请根据你的认识举例说明物理模型与数学模型的联系。

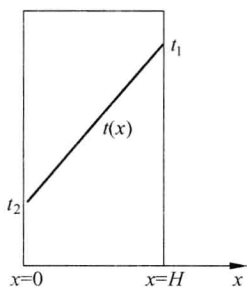


图 1-16



## 参 考 文 献

- [1] LUIKOV A V. Heat and mass transfer in capillary-porous bodies[M]. Oxford: Pergamon Press, 1966.
- [2] LUIKOV A V. System of differential equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies[J]. Int. Heat and mass transfer. 1975, 18:1-14.
- [3] WHITAKER S. Simultaneous heat, mass, and momentum transfer in porous media[J]. A theory of Drying. Advance in heat transfer. 1977, 13:119-203. New York: Academic press.
- [4] WHITAKER S. Coupled transport in multiphase systems[J]. Advance in heat transfer. 1998, 31:1-102.
- [5] 王补宣. 工程传热传质学: 下册. 北京: 科学出版社, 1998.
- [6] 林瑞泰. 多孔介质传热传质引论. 北京: 科学出版社, 1995.
- [7] 刘伟, 范爱武, 黄晓明. 多孔介质传热传质理论与应用. 北京: 科学出版社, 2006.
- [8] DARCY H. Les fontains publiques de Le Ville deDijon, V, Dalmont Paries, 1856.
- [9] NIED D A. BEJAN A. Convection in Porous Media[M]. 2nd ed. Springer, 2006.
- [10] FOURIER J B. Theorie Analytique de la Chaleur, Paris, English translation by Freeman A. The Analytical Theory of Heat, Dover Publication Inc, New York, 1995.
- [11] LEWIS W K. The rate of drying of solid materials[J]. Ind. Eng. Chem, 1921, 13: 427-432.
- [12] 刘培生. 多孔材料引论. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [13] PLUMB O A. Heat and mass transfer in wood during drying[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1985, 28(9): 1669-1678.
- [14] TOEI R. Theoretical fundamentals of drying operation[J]. Drying Technology, 1996, 14 (1): 1-194.
- [15] SIAU J F. Transport processes in wood. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [16] 徐有明. 木材学. 北京: 中国林业出版社, 2006.
- [17] 成俊卿. 木材学. 北京: 中国林业出版社, 1985.
- [18] 刘从华, 高雄厚, 邓友全, 等. 石嘴山高岭土制备裂化催化剂应用研究[J]. 石化技术与应用, 2002, 20(5): 157-160.
- [19] 沈维道, 童均耕主编. 工程热力学. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [20] SIMPSON W T. Equilibrium moisture content of wood in outdoor locations in the United States and worldwide [R]. Research Note FPL-RN-0628, USDA Forest Products Laboratory. Madison, WI, 1998.
- [21] 俞昌铭. 热传导及其数值分析. 北京: 清华大学出版社, 1982.
- [22] INCROPERA F P. DEWITT D P. Fundamentals of heat and mass transfer[M]. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1990.

## 第 2 章

## Chapter

# 固体材料加热

固体,如果不加以特别说明,常指密实的固体。当一温度均匀且密实的固体与其温度不同的周围环境存在热量交换时,该固体的温度将发生变化,内部各处的温度不再均匀,从高温部位到低温部位必有热量传递。这种固体内部由高温部位向低温部位的热传递称为热传导或热扩散,也称导热。在流体(液体或气体)中,若能抑止其内部物质的相对迁移,也能出现与固体内部相同的单纯导热现象。但在通常情况下,流体内部的热传递过程既有热传导又有热对流。

多孔材料在一般意义上也常被认为是一种固体材料,当其表面接受加热或被冷却时,材料内部的热传递就不单纯是导热,往往伴随着孔隙间物质的质量传输过程。即便如此,其中导热仍然起着十分重要的作用。对于大都有效孔隙率低、渗透率低的多孔材料,导热往往起主要的作用。因此,要认识多孔材料内的热传递过程首先就应认识热传导。本章将围绕如图 2-1 所示的密实平板加热过程展开讨论。这里列举了两类加热方式,一类是如图 2-1(a)所示的平板材料上、下表面直接与热板接触;另一类如图 2-1(b)所示,平板材料上、下表面接受环境介质(热空气)对流加热。

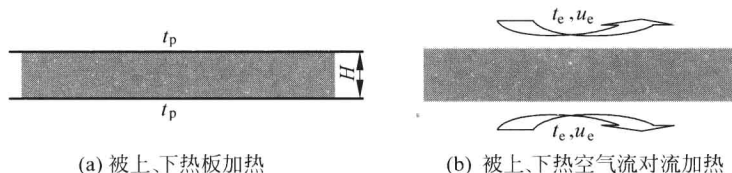


图 2-1 平板加热

本章将要回答的问题是,平板被加热后其温度怎样变化。

为回答上述问题,应将问题表述成恰当的数学形式,也即建立数学模型。具体地说,就是建立导热方程定解问题。而后,求解该定解问题,并以数学问题的解作为对上述实际问题的回答。

在建立导热定解问题之前,必须先认识几个与导热现象紧密相关的基本物理量与基本关系式。这些基本关系式就是导热现象的物理模型。

## 2.1 温度场与傅里叶定律

### 2.1.1 温度场与温度梯度

固体内各处不同的温度状态常称为温度分布。物理学上称这种温度分布为温度场。温度场是以某一时刻在一定空间内所有点上的温度值来描述的。它可表示为温度  $t$  是空间坐标与时间坐标的函数。常用的空间坐标有三种,如图 2-2 所示。直角坐标(笛卡儿坐标)系中用  $x, y, z$ ;柱坐标(圆柱面坐标)系中用  $r, \phi, z$ ;球坐标(球面坐标)系中用  $r, \phi, \psi$ 。时间坐标用  $\tau$ 。因此,一定空间内温度场可表示成的函数形式如下:

$$t = t(x, y, z, \tau) \quad \text{直角坐标系中}$$

或

$$t = t(r, \phi, z, \tau) \quad \text{柱坐标系中}$$

或

$$t = t(r, \phi, \psi, \tau) \quad \text{球坐标系中}$$

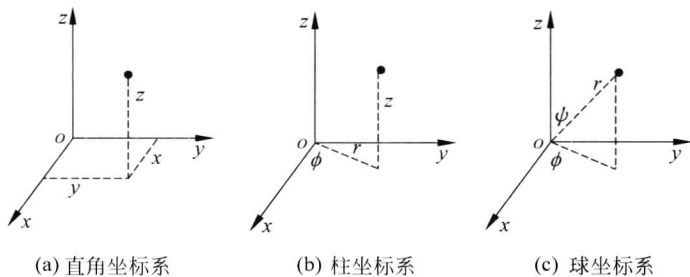


图 2-2 常用的三种坐标系

在温度场所处的范围内,任何地点的温度值和该地点几何位置相对应,即,一个地点只有一个温度值。温度场内任何一个地点不可能没有温度值,也不可能有一个以上的温度值。但相反,一个温度值可以出现在一个或一个以上不同的地点。

温度场内任意一点位置  $P$  有温度  $t$ ,  $P$  点的周围有若干个点(理论上无穷多个点),它们的位置分别为  $P_i (i=1, 2, \dots)$ 。  $P_i$  点分别对应温度值为  $t_i$ 。如果移动  $P_i$  点,使它们逐渐接近  $P$  点,即线段  $\overline{P_i P}$  逐渐趋于零。若温度  $t_i$  与  $t$  的差值也都趋于

零,则称温度场在  $P$  点连续。如果有一个温度差不趋于零,则称温度场在  $P$  点不连续。将以上分析推广到一个区域,若存在于该区域内所有点上的温度均连续,则称温度场在此区域内连续。也就是,区域有连续的温度分布。在数学上,连续的温度分布可用连续函数表示。

一般而言,密实均匀物体内部的温度场都是连续的温度场。如果物体内部有缝隙,则在缝隙处,温度可能发生突变,温度场在此处就不再连续了。对于多孔材料,其内部存在大量固相与孔隙的交界面,温度场在交界面处往往不再连续。

关于温度场的概念还有一点需特别强调。如前所述,温度是对空间的点来定义的,一个点对应一个温度值。但从热力学<sup>[1]</sup>的观点来看,温度却是对一个由大量物质组成的体系来定义的,一个温度值对应着一个体系,一个点的温度是没有意义的。这样,从场的角度与从热力学体系的角度对温度的认识不就出现矛盾了吗?为了调和这对矛盾,对温度场中的“点”应作如下的理解:从物体的整体来看,这个点是足够的小,小到它所占据的体积对于物体的体积来说,可忽略不计;而从物体内部分子运动角度来看,这个点又是足够的大,大到它所包含的大量分子足以克服温度值的涨落,这个由大量分子组成的点是一个平衡的热力学体系。总之,从整体而言,物体内部各处温度是不同的,热是不平衡的。而从物体内的某个局部而言,由足够多分子构成的一个点可用一个温度来表示,热是平衡的。我们称由这样的点所组成的温度场为处于局部的热平衡。我们所研究的导热现象,就是研究这种局部处于热平衡而整体不平衡的温度场的行为。

若温度场各处温度值不随时间变化,只是空间坐标函数,则称该温度场为稳态温度场。若温度场各处温度值既是空间坐标函数又是时间坐标的函数,则该温度场为非稳态温度场,或瞬态温度场。与稳态及非稳态温度场相对应的导热现象称为稳态导热及非稳(瞬)态导热。

若温度场只含有一个空间坐标,则称一维温度场,若含有两个或三个空间坐标,则称二维或三维温度场。相应地,有一维、二维或三维导热。如果物体温度只是时间的函数,则称为零维导热。

在阅读文献中,有三种温度单位是常见的。它们是:开尔文温度( $T/K$ )、摄氏温度( $t/^{\circ}\text{C}$ )和华氏温度( $\theta/^{\circ}\text{F}$ )。它们相互之间有确定的关系,如图 2-3 所示。

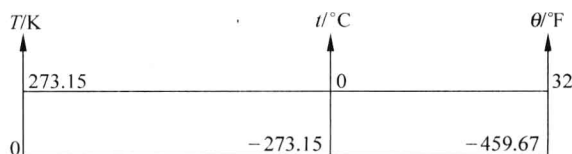


图 2-3 三种常用温度对应关系

这三种温度中,开尔文温度又称热力学温度,它与摄氏温度是国际标准,它们间的关系是

$$T = t + 273.15 \quad (\text{K})$$

式中, $T$ 是用K表示的温度,称为绝对温度; $t$ 是用 $^{\circ}\text{C}$ 表示的温度,称为摄氏温度。例如,空气温度为 $20^{\circ}\text{C}$ ,其绝对温度为 $293.15\text{ K}$ 。

摄氏温度与华氏温度的关系是

$$\theta(^{\circ}\text{F}) = t(^{\circ}\text{C}) \times 9/5 + 32$$

式中, $t(^{\circ}\text{C})$ 与 $\theta(^{\circ}\text{F})$ 是用 $^{\circ}\text{C}$ 与用 $^{\circ}\text{F}$ 表示的温度。例如,人体正常温度用 $^{\circ}\text{C}$ 表示为 $36.8^{\circ}\text{C}$ ,用 $^{\circ}\text{F}$ 表示则为 $98.2^{\circ}\text{F}$ 。

在我国,由于长期坚持使用国际标准,华氏温度已很少见,但在西方国家,尤其在美国,华氏温度仍广泛地被使用。

温度是标量,温度场也就是标量场。

为了更具体地描述温度场的特征,下面介绍等温面与温度梯度。

### 1. 等温面

温度场内温度相同各点的集合构成某种等温集合,若此集合为一几何面(平面或曲面),则称该几何面为等温面。若此集合为一曲线(包括直线),则称该曲线为等温线。图2-4为一温度场的截面,在此截面上,等温面被切割成等温线,分别对应于温度 $t, t+\Delta t, t-\Delta t$ 等。由于物体内部一个点上只有一个温度值,它不可能同时属于两个等温面,因此,不同等温面不可能相交。此外,等温面也不可能在场内终止,它或者是伸展到物体的边界,或者自身形成封闭曲面。

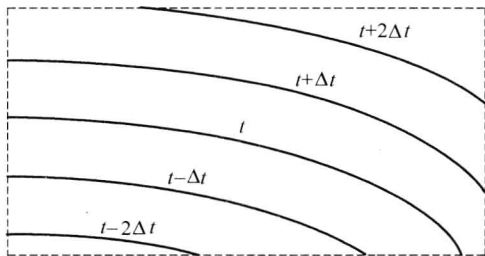


图 2-4 等温面

### 2. 温度梯度

若连续温度场内某点 $P$ 从属于某一个等温面,则从 $P$ 点出发沿除了等温面之外的其他任意方向,温度都是不同的。既然如此,在 $P$ 点应该存在这样一个方向,

即垂直于等温线的方向,在这个方向上的温度变化率(单位距离上的温度变化量)比其他方向的温度变化率都大。这样,我们可以在  $P$  点定义一个向量,此向量的方向朝着温度最大增长率的方向  $\mathbf{n}$ ,其大小为单位距离上温度的变化量  $\frac{\partial t}{\partial n}$ 。该向量称作温度场在  $P$  点的梯度,简称温度梯度。

温度梯度的数学表示有多种形式,常见的是如下三种:  $\text{grad}t$ 、 $\nabla t$  或  $\frac{\partial t}{\partial n}\mathbf{n}$ 。在直角坐标系内它们都可写成

$$\text{grad}t \quad \text{或} \quad \nabla t \quad \text{或} \quad \frac{\partial T}{\partial n}\mathbf{n} = \frac{\partial t}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial t}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial t}{\partial z}\mathbf{k}$$

其中  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  和  $\mathbf{k}$  分别为沿  $x$ ,  $y$  和  $z$  坐标轴上单位向量,  $\mathbf{n}$  则是沿温度梯度方向的单位向量。这里,用黑体字表示该物理量为向量。

过  $P$  点的任意曲面  $A$ ,它在  $P$  点处外法线方向为该曲面的方向,  $\mathbf{A}$  是曲面  $A$  的单位向量。若  $\mathbf{A}$  与温度梯度方向  $\mathbf{n}$  的夹角为  $\theta$ ,则  $\mathbf{A}$  方向上的温度变化率  $\frac{\partial t}{\partial A}$  为

$$\frac{\partial t}{\partial A} = \frac{\partial t}{\partial n}\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \quad (2-1-1)$$

图 2-5 对式(2-1-1)作了图解。如图 2-5 所示,  $\frac{\partial t}{\partial A}$  是  $\frac{\partial t}{\partial n}\mathbf{n}$  在  $\mathbf{A}$  上的投影。式(2-1-1)中  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$  表示两个单位向量的点积。根据向量运算规则,两个向量的点积是一个标量,其大小是两个单位向量夹角的余弦,即

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = \cos \theta \quad (2-1-2)$$

将式(2-1-2)代入式(2-1-1),可得

$$\frac{\partial t}{\partial A} = \frac{\partial t}{\partial n} \cos \theta \quad (2-1-3)$$

从式(2-1-3)可清楚地看到,任何方向上的温度变化率都不会大于温度梯度。

在连续温度场内的每一点上都可以定义温度梯度,这些温度梯度的全体构成温度梯度向量场。与温度梯度直接相联系的是热流密度向量。

## 2.1.2 热流密度向量

由于过  $P$  点沿非等温面方向的温度是变化的,因此,在这些方向上有热量传递。若把单位时间传过单位面积的热量定义为热流密度,记作  $q$ ,则在不同方向上

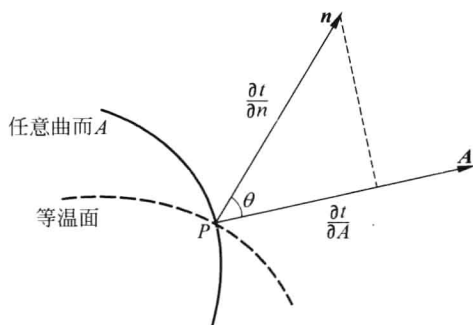


图 2-5 沿任意曲面的温度变化率与温度梯度的关系

有不同的热流密度。与定义温度梯度的方法一样,可以在  $P$  点定义热流密度向量。此向量的方向是热流密度最大的方向,其大小等于沿着这方向单位时间单位面积流过的热量。热流密度向量记作  $q$ 。

在连续温度场内每一点都可以建立热流密度向量,这些热流密度向量的全体构成热流密度向量场,简称为热流场。与表示温度场相对应,热流密度向量场也是坐标的函数,可表示为

$$q = q(x, y, z, \tau) \quad \text{直角坐标系中}$$

或

$$q = q(r, \phi, z, \tau) \quad \text{圆柱坐标系中}$$

或

$$q = q(r, \phi, \psi, \tau) \quad \text{球坐标系中}$$

在  $P$  点处过任意曲面  $A$  的热流密度  $q_A$  为

$$q_A = q \cdot (-A) \quad (2-1-4)$$

也可写为

$$q_A = |q| \cos \theta$$

图 2-6 对式(2-1-4)作了图解。

综上所述,我们引入了温度、温度场、温度梯度和温度梯度场,还引入了热流密度、热流密度向量及热流密度向量场。这里,温度、温度场及热流密度都是标量或标量场,而温度梯度、温度梯度场、热流密度向量及热流密度向量场均为向量及向

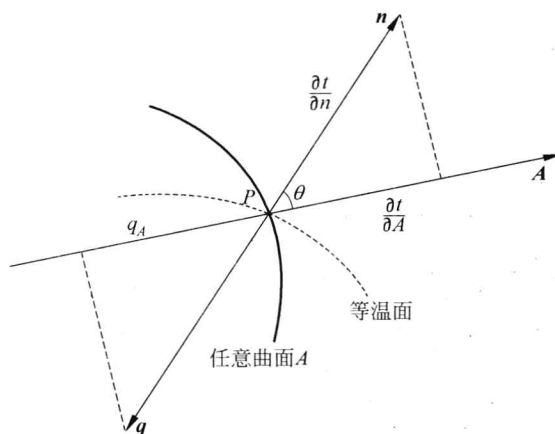


图 2-6 沿任意曲面的热流密度与热流密度向量的关系

量场。

在有些教科书及科技文献中,把热流密度直接定义为向量,而把任意方向的热流密度称为热流密度分量。

### 2.1.3 傅里叶定律

傅里叶定律是描述导热现象的基本定律,也称为导热现象的本构方程。其最简单的表示式如下:

$$q = \lambda \frac{\Delta t}{H}$$

式中, $H$  为图 2-1 所示平板的厚度; $\Delta t$  为平板材料上、下表面的温度差; $\lambda$  是平板材料的导热系数; $q$  是通过平板的热流密度。但更一般而言,傅里叶定律是连续温度场内任意点上的温度梯度与热流密度向量的联系,表示为如下数学形式:

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad} t \quad (2-1-5)$$

关于傅里叶定律的由来及各种表示在很多传热学教科书中都有很好的阐述,读者可参阅文献[2~5],这里只是强调掌握傅里叶定律应领会的几个要点:

(1) 式(2-1-5)适用于连续温度场内任意一点  $P$ ,任意时刻  $\tau$ 。

(2) 过  $P$  点的温度梯度与热流密度向量同处一条直线,方向相反,都垂直于等温面。这一结论与如何选取坐标系无关。式(2-1-5)中负号体现了温度梯度与热



流密度向量方向相反。

(3) 温度梯度与热流密度向量在一个点上的定量联系由系数 $\lambda$ 来体现。在给定点上,这个系数 $\lambda$ 具有一个确定的值。

(4) 从式(2-1-5)中可得到如下的启发:当物体内的温度场确定之后,热流场被唯一地确定下来了。这是因为,当温度为空间的确定函数时,这个函数对空间坐标的导函数也就确定了。相反,在已知热流场条件下,温度场还不能唯一地被确定下来。正是这样的缘故,在导热问题研究中,人们总是把注意力集中在分析物体内部的温度场。

对于像多孔材料这样的非连续介质,或者各向异性的介质,严格地讲,式(2-1-5)所示的傅里叶定律不再成立。或者说,它要用别的形式来替代,或对导热系数赋予新的含义。

#### 2.1.4 导热系数与热扩散率

如前所述,导热系数 $\lambda$ 是把物体内部每个点上的温度梯度与热流密度向量定量联系起来的一个量,它是由该点材料的性质所决定,即导热系数是材料固有的属性。这种由材料性质所确定的物理量为物性量,简称物性。与传热行为相联系的物性,称热物性。由于这类物性量是对物体内部每一点来定义的,这样,就可以引进热物性场的概念,以表示材料在该处传导热量能力的强弱。关于导热系数 $\lambda$ 的定义可从式(2-1-5)所示的傅里叶定律得到:

$$\lambda = - \frac{q}{\text{grad} t} \quad (2-1-6)$$

导热系数 $\lambda$ 可表述为在单位温度梯度推动下,单位时间内通过单位面积的热量。

根据这一定义, $\lambda$ 的单位是 $\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot (\text{K}/\text{m})}$ ,化简后为 $\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$ 。

对于均匀且各向同性材料而言,若物体内部各处的物理状态,如温度、压力相同,则各处的导热系数相同,且可用这一相同的导热系数来反映该材料的导热能力。

各种材料所以呈现不同的导热能力,是由于各种材料内部结构不同及所处状态不同造成的。如果能通过对物质结构及所处状态的研究,直接计算出导热系数的大小那就好了。但遗憾的是,至今只能对少数物质在一定条件下通过计算的途径得到导热系数<sup>[6]</sup>,绝大部分材料的导热系数还只能通过实验测定的方法获得。目前已有很多研究机构将大量由实测得到的导热系数数据绘制成表格甚至制作成计算机软件供用户使用<sup>[7-10]</sup>。

既然导热系数被认为是物质的属性,则材料不同,导热系数也就不同。不同类

型物质的导热系数由大到小的顺序大体是,固体大于液体,液体大于气体。固体材料中,金属材料大于非金属材料。金属材料中,纯金属材料大于合金材料。它们的大致数值范围如下:金属为  $50 \sim 415 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,合金  $12 \sim 120 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,非金属材料  $0.03 \sim 10 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,液体  $0.17 \sim 0.7 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,气体  $0.007 \sim 0.17 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。导热系数除因材料不同而不同之外,它的大小还常常与材料所处状态有关,一般与压力关系不大,但受温度的影响很大。纯金属和大多数液体的导热系数随温度的升高而降低,但水例外;非金属和气体的导热系数随温度的升高而增大。

请读者注意,上述所列关于非金属材料导热系数的数值范围,从最大值到最小值,相差达3个数量级。这是因为非金属材料(如橡胶、岩石、混凝土、木材等)中很多是多孔材料,即它们由固相物质与孔隙内流体相物质混合组成。这样,由于材料内部固相与孔隙结构不同,造成宏观的导热系数数据不同。例如木材,它的导热系数大体在  $0.04 \sim 0.4 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$  这样一个范围,且呈各向异性。关于多孔材料导热系数的更多认识将在第4章中再行讨论。

热扩散率  $a$  是与导热系数相联系的另一个热物性参数,其定义为

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2-1-7)$$

式中,  $\rho$  与  $c$  分别为材料的密度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) 与比热容 [ $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ];  $a$  常见单位为  $\text{m}^2/\text{s}$ 。热扩散率也被称为导温系数。

热扩散率的引入使傅里叶定律式(2-1-5)又可表示为

$$\mathbf{q} = -a \text{grad}(\rho c t) \quad (2-1-8)$$

对照式(2-1-8)与式(2-1-5),如果说式(2-1-5)所示为热流密度向量与温度( $t$ )梯度的联系,则式(2-1-8)所示为热流密度向量与热焓( $\rho c t$ )梯度的联系。

## 2.2 导热定解问题的建立与求解

傅里叶定律的作用是揭示连续温度场内每个点上温度梯度与热流密度向量的联系,它并没有揭示温度场内某点的温度与它邻近点温度的联系,也没有揭示某点在这个时刻的温度与下一时刻温度的联系。下面介绍的导热方程正是揭示连续温度场在空间与时间领域里的内在联系。

支配温度场在空间与时间领域里内在联系的规律是能量守恒定律,它是自然界客观存在的最普遍的定律之一。能量守恒定律在热现象中的体现为热力学第一

定律。具体到热传导现象可表述为：对一个热力学体系而言，单位时间内通过体系边界进入体系的热量（热流率） $Q_1$  与体系内部单位时间所产生热量（热量释放率） $Q_2$  之和，等于单位时间内该体系所含物质能量的增加  $Q_3$ ，即

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (2-2-1)$$

在式(2-2-1)所示能量守恒基础上，结合傅里叶定律，即可推导得到导热方程。

### 2.2.1 导热方程推导

根据选取热力学体系的方式不同，导热方程的推导可有如下两种途径。两种途径在实质上是相同的，但数学手段有所不同，读者在阅读时注意对比。若感到途径一（见 2.2.1.1）在数学理解上有所困难的话，不妨专心学好途径二（见 2.2.1.2）。

#### 2.2.1.1 一般坐标系内

所谓一般坐标系，是指如下推导过程在图 2-2 所示三种坐标系都成立。

在存在导热现象的固体内部画出一个任意封闭面  $A$ ，这封闭面所包含的体积为  $V$ ， $V$  内物质构成一个热力学体系，如图 2-7 所示。

现针对这个热力学体系，分别介绍包含在式(2-2-1)中的  $Q_1$ 、 $Q_2$  与  $Q_3$ ，写出它们的数学表达式。

##### 1. 关于 $Q_1$

根据  $Q_1$  的定义，可得

$$Q_1 = \iint_A q_A dA \quad (2-2-2)$$

式中， $Q_1$  是单位时间内通过边界面  $A$  进入体系的热量； $q_A$  是界面  $A$  任意处界面元  $dA$  由体系周围介质通过  $dA$  进入体系的热流密度，它与该处的热流密度向量的关系由式(2-1-4)所示，也即，

$$q_A dA = -\mathbf{q} \cdot d\mathbf{A}$$

现将热流密度向量  $\mathbf{q}$  的表达式(2-1-5)代入上式，以此体现进入体系的热流密度是以导热的方式，再将上式代入式(2-2-2)，使之成为

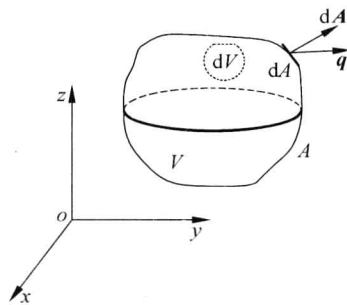


图 2-7 取  $V$  为一热力学体系  
推导导热方程

$$Q_1 = \iint_A q_A dA = \iint_A \lambda \operatorname{grad} t \cdot dA \quad (2-2-3)$$

式(2-2-3)的含义是,单位时间内体系周围介质以导热方式通过边界面  $A$  进入体系的热量。

## 2. 关于 $Q_2$

根据  $Q_2$  的定义,可得

$$Q_2 = \iiint_V q_v dV \quad (2-2-4)$$

式中,  $Q_2$  是单位时间内由体系自身产生的热量;  $q_v$  是体系内的释(吸)热强度,也称热源(汇)强度,其定义为单位时间单位体积内释放的热量。例如,导体内通过电流,体系内物质有化学反应都可以视为热源。在一定条件下,它们都可在体系内释放或吸收热量。

## 3. 关于 $Q_3$

根据  $Q_3$  的定义,可得

$$Q_3 = \frac{d}{d\tau} \iiint_V \rho c t dV \quad (2-2-5)$$

式中,  $Q_3$  是体系在单位时间内热能的增加量;  $\rho$  是体系物质的密度,即单位体积内物质的质量( $\text{kg}/\text{m}^3$ );  $c$  是比热容,即体系内物质单位质量温度升高  $1\text{ K}$  所需要的热量 [ $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ]; 密度与比热容的乘积  $\rho c$  的物理含义是体系内单位体积物质升高  $1\text{ K}$  所需要的热量,称为该固体材料单位体积的热容 [ $\text{J}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$ ];  $\rho c t$  的物理含义是固体材料单位体积所具有的显热能 ( $\text{J}/\text{m}^3$ );  $\iiint_V \rho c t dV$  的物理含义是如图 2-7 所示体系  $V$  所具有的显热能 ( $\text{J}$ )。

将式(2-2-3)~式(2-2-5)代入式(2-2-1),可得

$$\iint_A \lambda \operatorname{grad} t \cdot dA + \iiint_V q_v dV = \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_V \rho c t dV \quad (2-2-6)$$

式(2-2-6)为导热方程的积分形式,也称积分形式导热方程。

从式(2-2-6)看到,除等号左边第一项的二重积分表示对面积  $A$  的积分之外,其余两项的三重积分都表示对体积  $V$  的积分。为了将上述的二重积分也转换成三重积分,可应用高斯公式(又称奥-高公式)<sup>[11]</sup>。为此,可得

$$\iint_A \lambda \text{grad} t \cdot dA = \iiint_V \text{div}(\lambda \text{grad} t) dV \quad (2-2-7)$$

式(2-2-7)中符号  $\text{div}$  表示向量的散度。

将式(2-2-7)代入式(2-2-6),可得

$$\iiint_V \text{div}(\lambda \text{grad} t) dV + \iiint_V q_v dV = \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_V \rho c t dV \quad (2-2-8)$$

与式(2-2-6)相对应,式(2-2-8)为积分形式导热方程的另一种形式。

式(2-2-8)经移项整理后,成为

$$\iiint_V \left[ \text{div}(\lambda \text{grad} t) + q_v - \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho c t) \right] dV = 0 \quad (2-2-9)$$

式(2-2-9)表示等号左边积分号下方括号内那个被积函数对体系  $V$  的积分为 0。根据积分中值定理,在体系  $V$  内总存在一个点,譬如说,  $P$  点,在这一点被积函数为 0,也即

$$\left[ \text{div}(\lambda \text{grad} t) + q_v - \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho c t) \right]_P = 0 \quad (2-2-10)$$

由于体系  $V$  是在导热固体内任意选取的,且体系的体积可以是任意小量,则  $P$  点实际上是导热固体内的任意一点。也就是说,式(2-2-10)在导热固体内任意一点都是成立的,则式(2-2-10)成为

$$\text{div}(\lambda \text{grad} t) + q_v = \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho c t) \quad (2-2-11)$$

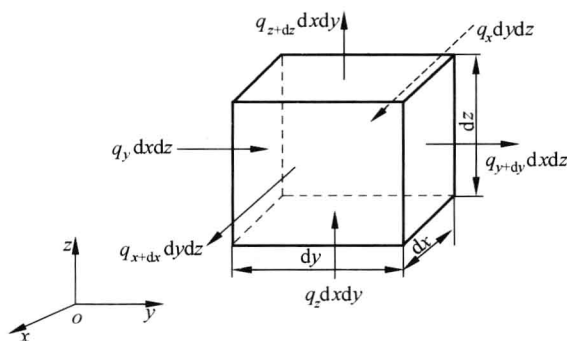
式(2-2-11)是导热微分方程的一般形式,它适用于不同的坐标系。

### 2.2.1.2 特定坐标系内

所谓特定坐标系,是指如下推导过程是在图 2-2 所示三种坐标系中的一个特定坐标系内进行的。这里不妨选用直角坐标系,这对大都平板型固体也是最恰当的。

在直角坐标系内取元体  $dV (= dx dy dz)$  这一立方体作为一热力学体系,如图 2-8 所示。

与 2.2.1.1 节途径一相同,对这个热力学体系  $dV$  而言,单位时间内,通过边界面进入体系的热量  $Q_1$  与体系  $dV$  内部产生热量  $Q_2$  之和等于该体系所含物质能量的增加量  $Q_3$ ,即式(2-2-1)成立。

图 2-8 取  $dV$  为一热力学体系推导导热方程

### 1. 关于 $Q_{1y}$

见图 2-8, 从作为热力学体系的立方体  $dV$  左侧沿  $y$  方向流入立方体的热流为  $q_y dx dz$ , 而从立方体右侧沿  $y$  方向流出立方体的热流为  $q_{y+dy} dx dz$ , 则在  $y$  方向上单位时间内进入体系  $dV$  的热量  $Q_{1y}$  为

$$Q_{1y} = q_y dx dz - q_{y+dy} dx dz \quad (2-2-12)$$

在存在导热过程的密实固体内部, 温度场  $t$  是连续的, 热流密度  $q_y$  也是连续的。根据连续函数的性质, 函数在  $y$  处可展开泰勒级数。其含义是, 在  $y+dy$  处的函数值可以用  $y$  处的函数值及函数在该处的各阶导数来表示, 即

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + \dots \quad (2-2-13)$$

将式(2-2-13)代入式(2-2-12), 可得

$$Q_{1y} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx dz + \dots \quad (2-2-14)$$

再将如下标量形式的傅里叶定律

$$q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}$$

代入式(2-2-14), 在导热系数  $\lambda$  为常数条件下, 使之成为

$$Q_{1y} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy dx dz + \dots$$

当体系  $dV$  趋于 0 时,上述省略号所代表的各项以更高阶方式趋向于 0,因此均可忽略,即可得

$$Q_{1y} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy dx dz \quad (2-2-15)$$

依照上述相同的推导过程,可得到在  $x$  方向与  $z$  方向在单位时间内进入体系  $dV$  的热量  $Q_{1x}$  与  $Q_{1z}$ ,它们分别为

$$Q_{1x} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx dy dz \quad (2-2-16)$$

与

$$Q_{1z} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dz dx dy \quad (2-2-17)$$

根据

$$Q_1 = Q_{1x} + Q_{1y} + Q_{1z} \quad (2-2-18)$$

将式(2-2-15)~式(2-2-17)代入式(2-2-18),可得

$$Q_1 = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dx dy dz \quad (2-2-19)$$

## 2. 关于 $Q_2$

根据  $Q_2$  的定义,即单位时间体系  $dV$  内产生的热量,可得

$$Q_2 = q_v dx dy dz \quad (2-2-20)$$

上式中的  $q_v$  与式(2-2-4)中的  $q_v$  相同,为热源强度。

## 3. 关于 $Q_3$

根据  $Q_3$  的定义,即体系  $dV$  在单位时间内热能的增加,可得

$$Q_3 = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} dx dy dz \quad (2-2-21)$$

综上所述,将式(2-2-19)~式(2-2-21)代入式(2-2-1),消去共因子  $dx dy dz$ ,可得

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + q_v = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-2-22)$$

这是直角坐标下物性参数  $\rho$ 、 $c$  与  $\lambda$  为常数的导热微分方程。

在柱坐标系或球坐标系内,选取适合于不同坐标系的单元体  $dV$  作为热力学体系,按照直角坐标系类似的推导方式,可得到柱坐标与球坐标的导热微分方程,当  $q_v=0$  时,其形式如式(2-2-26)与式(2-2-27)所示。

对比上述推导导热方程的途径一与途径二,在途径一中,取有限体积  $V$  作为体系,而后将  $V$  缩成一个点;在途径二中,取微元体  $dV$  作为体系,推导得到适用于点的方程。两者虽然在出发点上有所不同,结果是相同的。

### 2.2.1.3 导热方程的不同形式

式(2-2-11)所示一般形式导热微分方程,针对不同条件将演变成不同的形式。

(1) 如果导热系数  $\lambda$ 、密度  $\rho$  及比热容  $c$  等热物性参数均为常数,式(2-2-11)将演变成式(2-2-22),可写为

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} t) + \frac{q_v}{a} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-2-23)$$

应该指出,大多数工程材料的热物性参数与温度有关。但在一定条件下,为了便于数学处理,近似地认为这些热物性量为常数,这是常见的一种处理方法。

(2) 如果导热固体内不存在热源或热汇,即  $q_v=0$ ,式(2-2-23)即可简化成

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} t) = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-2-24)$$

式(2-2-24)被称为傅里叶导热微分方程,也是最典型的导热微分方程。在有些书籍与文献中,把式(2-1-5)所示的傅里叶定律称为傅里叶第一定律,而把式(2-2-24)所示的傅里叶导热微分方程称为傅里叶第二定律。

(3) 式(2-2-24)在常见的三种坐标系内的形式如下:

直角坐标系

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-2-25)$$

柱坐标系

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-2-26)$$

球坐标系

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2} + \frac{\cos \psi}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial t}{\partial \psi} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-2-27)$$



(4) 上述式(2-2-25)~式(2-2-27)这三个方程都是在三维空间内成立的,如果讨论的导热问题是在一维或二维空间,这些方程可进一步简化。以直角坐标系为例,在一维( $x$ )与二维( $x, y$ )空间内,式(2-2-25)被简化成

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-2-28)$$

和

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-2-29)$$

(5) 在稳态导热物体内,即温度场不是时间的函数,方程(2-2-23)可简化成

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} t) + \frac{q_v}{a} = 0 \quad (2-2-30)$$

在无热源(汇)情况下,式(2-2-30)又可简化成

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} t) = 0 \quad (2-2-31)$$

或

$$\nabla^2 t = 0 \quad (2-2-32)$$

式(2-2-32)被称为拉普拉斯方程。

### 2.2.2 定解条件

建立在能量守恒原理与傅里叶定律基础上的导热微分方程,是导热物体内部温度场的一般描述,也就是说,导热现象的各种温度场都应该满足导热微分方程。但是,导热微分方程并不能给出各种特定条件下物体内部具体的导热现象。这是因为,从数学上讲,导热微分方程只在不包括边界(时间边界与几何边界)的开区间内成立,而不同的导热现象恰恰是由于边界处于不同条件而引起的。因此,要使一个导热现象确定下来,还必须提供边值条件,即单值性条件或定解条件。总之,为了求得具体的温度分布,除了有导热微分方程之外,还必须有定解条件。由微分方程与定解条件构成一个定解问题才能确定唯一解(唯一的随时间变化的温度分布)。

定解条件包括几何条件、时间条件、边界条件及物理条件四个部分。

#### 1. 几何条件

几何条件是指所讨论的导热物体的几何形状。从数学上讲,是给出导热微分方程的空间定义域。对于平板材料而言,就是给出平板的长度、宽度及厚度(高度)。

## 2. 时间条件

时间条件是指所讨论的导热现象所占有的时间范围,也即导热微分方程的时间定义域。此外,时间条件还指导热现象开始时的状态,即初始条件。严格地讲,初始条件要求给出导热物体在初始时的温度分布,但通常,假定这种分布为某一常数,即给出一个初始温度。

## 3. 边界条件

边界条件是指导热物体与其周围环境交界面上的传热状况。它们大体可分为:与环境进行对流热交换,与环境进行辐射热交换,以及边界与另一固体相接触进行导热热交换。从数学上讲,定解问题的边界条件常分三类,分别称第一类、第二类及第三类边界条件<sup>[11]</sup>。

第一类边界条件是给出导热物体边界上的函数值,即给出边界上的温度

$$t_s = f_1(\tau) \quad (2-2-33)$$

第二类边界条件是给出边界上的导函数的值,即给出边界上的温度沿边界法向导数

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_s = f_2(\tau) \quad (2-2-34)$$

第三类边界条件是给出边界上的函数与导函数的线性组合,即

$$C_1 t_s + C_2 \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_s = f_3(\tau) \quad (2-2-35)$$

上述式(2-2-33)~式(2-2-35)中,下角标  $s$  表示边界处; $n$  是边界的外法线方向; $f_1(\tau)$ 、 $f_2(\tau)$  与  $f_3(\tau)$  为已知函数;系数  $C_1$  与  $C_2$  为已知常数。

下面介绍如图 2-9 所示实际的对流传热表面条件与上述第一类、第二类及第三类边界条件的联系。

把能量守恒原则应用到如图 2-9 所示处于对流传热环境下固体材料表面(边界) $s$  处,即单位时间内从物体内部以导热方式到达边界单位面积上的热量( $q_{\text{cond}}$ )等于从边界以对流方式传给环境的热量( $q_{\text{conv}}$ ),也就是说,物体表面处热流密度连续,导热热流密度等于对流热流密度,即

$$q_{\text{cond}} = q_{\text{conv}} \quad (2-2-36)$$

式中,导热热流密度  $q_{\text{cond}}$  为

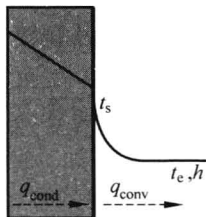


图 2-9 固体表面上对流传热边界条件

$$q_{\text{cond}} = -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s \quad (2-2-37)$$

表面(边界)对流热流密度  $q_{\text{conv}}$  为

$$q_{\text{conv}} = h(t_s - t_e) \quad (2-2-38)$$

将式(2-2-37)与式(2-2-38)代入式(2-2-36),可得

$$-\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = h(t_s - t_e) \quad (2-2-39)$$

或

$$\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = h(t_e - t_s)$$

式中,  $t_s$  与  $t_e$  分别为固体表面与环境流体的温度;  $h$  为固体表面与环境流体之间的对流传热表面传热系数, 它的定义是, 当固体表面与环境的温度差别为 1 K 时, 单位时间内通过表面单位面积的热量, 常用单位为  $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。这里的导热系数  $\lambda$ , 表面传热系数  $h$ , 环境温度  $t_e$  都是已知的。式(2-2-39)可改写成

$$ht_s + \lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = ht_e \quad (2-2-40)$$

对比式(2-2-35)与式(2-2-40)不难发现, 式(2-2-40)即为第三类边界条件, 式中  $h$  对应于  $C_1$ ,  $\lambda$  对应于  $C_2$ , 以及  $ht_e$  对应于  $f_3(\tau)$ 。显然, 式(2-2-39)也是第三类边界条件, 也就是说, 对流边界条件为第三类边界条件。在某种条件下, 第三类边界条件可转化为第一类或第二类边界条件。例如, 当表面传热系数  $h$  值很大, 而  $\lambda(\partial t/\partial n)_s$  为某一有限值(因热流密度  $q$  总是一个有限值)时, 要维持等式(2-2-39)成立, 必然可得到如下推论: 温差  $(t_s - t_e)$  很小, 也即

$$t_s \approx t_e \quad (2-2-41)$$

式(2-2-41)如同式(2-2-33), 即  $f_1(\tau) = t_e$ , 由此使第三类边界条件式(2-2-39)转化为第一类边界条件式(2-2-41)。又如, 当表面传热系数  $h$  值很小, 且  $t_e$  比  $t_s$  大得很多, 而  $\lambda(\partial t/\partial n)_s$  仍是某一有限值, 上述式(2-2-39)可改写为

$$\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s \approx ht_e \quad (2-2-42)$$

式(2-2-42)如同式(2-2-34), 即  $f_2(\tau) = ht_e/\lambda$ , 由此使第三类边界条件式(2-2-39)转化为第二类边界条件式(2-2-42)。

总结式(2-2-40)~式(2-2-42)可知,导热物体表面若处于对流传热环境则为第三类边界条件;若表面传热系数 $h$ 很大,则近似为给定边界温度(实际是环境温度),即第一类边界条件;若导热物体表面上热流密度很大,则为给定边界热流密度,即第二类边界条件。

#### 4. 物理条件

物理条件是指出现在导热方程及定解条件中的热物性参数,如密度 $\rho$ 、比热容 $c$ 与导热系数 $\lambda$ 等的值。关于导热系数 $\lambda$ 我们在2.1.4节中已有所介绍。关于密度 $\rho$ 及比热容 $c$ ,对于密实的固体材料,大都可在此类手册中查到。对于像泡沫塑料、木材那样的多孔材料,情况就复杂些,将在以后相关章节作进一步介绍。上述第三类边界条件中出现的表面传热系数 $h$ ,也属物理条件,关于它的选取或计算请参阅相关传热学书籍<sup>[4,5,12]</sup>或手册<sup>[13]</sup>。

本节至此,介绍了导热方程及定解条件,两者结合构成导热定解问题。若导热方程与定解条件都是线性的,由此构成的定解问题为线性定解问题,对它的求解一般比较容易。本章讨论的导热问题仅限于这类线性定解问题。

多孔材料导热问题中,往往还会遇到大量非线性的定解问题,例如,变化的热物性,物体内部与(或)边界上有相变等,这些都属非线性问题。对这类问题将在以后几章中讨论。

应该强调指出,这里所说的定解问题都是在已知微分方程与定解条件下求解温度场,这类问题称为导热正问题或导热问题。在工程实际中还会遇到另一类问题,在已知温度场部分信息以及部分定解条件下求另一部分温度场或定解条件。例如,已知物体内部某处温度变化规律(用实验测得),求表面上的温度或热流密度。这类求解定解条件的问题称为导热反问题<sup>[14]</sup>。在导热反问题中,有一类是计算材料的热物性<sup>[15]</sup>。其实,测定材料导热系数的实验大都是依据导热反问题的原理设计的。

### 2.2.3 求解导热问题的方法

求解导热定解问题的方法很多,可以从不同角度予以归纳。但一般而言,根据问题表述的形式不同,求解的方法也不同。大致可归为四大类:精确分析解法、近似分析解法、数值解法及各种模拟的方法。从最终得到的解而言,除精确分析解法求得的是精确解之外,其他各种方法求得的都是近似解。

#### 1. 精确分析解法

精确分析解法是指以数学分析为基础求解导热微分方程定解问题,得到用函数形式表示的解,而且这个函数在导热现象所在的时间与空间区域内逐点满足导热微分方程。由于这个解逐点满足导热微分方程,所以称这种解为精确解。精确

解的最终形式是将因变量温度表示成由自变量(时间坐标与空间坐标)及包含在定解条件中各参数所构成的函数。这样,可从精确解的函数中清楚地看到各参数对温度的影响。

若导热问题可表示为较为简单的常微分方程定解问题,则用精确分析解法比较成熟,求解过程也比较简单,例如,一维平壁稳态导热、集总热容物体温度变化等问题。若导热定解问题为偏微分方程,采用精确分析解法就比较复杂,且求解方法很多,最常见的是分离变量法,其他还有如拉普拉斯变换法、格林函数法、杜哈美尔法等<sup>[2]</sup>。应该强调指出,对于稍微复杂的导热偏微分方程,甚至常微分方程,在很多情况下,精确分析解法仍显得无能为力。

## 2. 近似分析解法

近似分析解法也是以数学分析为基础的求解方法,得到的也是以函数形式表示的解,也是一种连续的温度分布。这个函数在求解区域整体上满足能量守恒,这一点,它与精确分析解法是相同的。但对求解区域每一点而言,近似分析解法与精确分析解法得到的结果只是近似地相等。也就是说,精确分析解法所得到的函数形式在求解区域逐点精确地满足原导热微分方程定解问题,而近似分析解法得到的函数形式在求解区域每一点处只是近似地满足原导热微分方程定解问题。

如果我们讨论的问题是从事(2-2-6)所示的导热积分方程出发,对它最终求得的解只需满足积分方程,则我们也称这个解是近似分析解。

此外,导热定解问题除了可以表示成导热微分方程或导热积分方程的定解问题之外,还可以表示成其他形式,例如变分问题的形式。对变分问题的各种近似解法也可视为近似分析解法。

## 3. 数值解法

如果说上述分析解法是以数学分析为基础,则数值解法是以离散数学为基础的一种求解方法。在用数值方法对导热微分方程定解问题进行求解前先要对原导热微分方程进行变形使其适合运用数值方法。对原导热微分方程进行变形也有很多方法,最常见的是有限差分法<sup>[16]</sup>与有限单元法<sup>[17]</sup>。关于有限差分法,在1.1.3节中已有介绍,用有限差分法所得到的结果是求解区域内有限个离散点上的温度值。若离散点分布得足够密,离散点上一系列的温度值就能近似地代表连续的温度分布。有限单元法则是把原导热微分方程定解问题演变成变分问题,而后对此变分问题用有限单元法求解。近年来,人们把原本属于有限差分法中的控制容积单元法也称为有限单元法。

## 4. 模拟解法

相同的数学形式可描述不同的物理现象。利用这一特点,可以将导热微分方程定解问题演变成其他物理问题,而后对该物理问题用实验方法求解,再将实验得

到的解作为对导热问题的回答。这种用别的物理现象来模拟传热现象的方法称为模拟解法。例如,式(2-2-32)所示的拉普拉斯方程,在那里,它是稳态无源的导热方程,方程中的  $t$  代表温度。我们只需改变  $t$  这个字母,用  $U$  代替  $t$  (其实不改变字母也可以),则式(2-2-32)就成为

$$\nabla^2 U = 0 \quad (2-2-43)$$

式(2-2-43)则是静电场内关于电位(压)  $U$  的方程式。如果我们安排一个满足式(2-2-43)的实验,在实验中测得电位  $U$ ,这个电位  $U$  可演绎为温度  $t$ ,由此得到式(2-2-32)的解。

在上述方法中,精确分析解法与数值解法是目前求解导热定解问题最主要的方法。精确分析解法的优点是,在整个求解过程中物理概念与逻辑性都比较清晰,求解过程所依据的数学基础大都已有严格的证明,求得的解准确可靠且能清楚地表示出各种因素(如时间、空间坐标、包含在定解条件中的各参数)对温度分布的影响。由于这些优点,精确分析解的结果常作为近似分析解法,尤其是数值方法所得结果正确与否的一种检验。它的缺点是只能用于求解比较简单的问题。与精确分析解法相比,数值方法的优点是,它在实际问题面前显示出很大的适应性,例如,复杂的几何形状、变化的热物性、与别的方程相耦合等问题都能较好地得到解决。随着计算机的硬件与软件不断地改进,其计算速度与计算结果准确度不断得到提高。它的不足之处是,由于数值方法的数学基础在很多方面尚待完善,数值计算过程还带有相当的经验性因素,使所得结果的准确性在有些情形下受到质疑。

## 2.3 一维非稳态导热问题精确分析解

若导热物体内的温度分布只是时间与一个空间坐标的函数,则称这样的导热现象为一维非稳态导热。图 2-1 所示的平板应视为具有长度、宽度与厚度的三维平板,但由于其长度与宽度远大于厚度,且外部的加热(冷却)条件对称而均匀地施于上、下表面,使平板内部水平方向的热传递很微弱,可予以忽略,只需要计厚度方向导热,则平板内的导热过程可简化为一维非稳态导热。在一维问题中,板的长度与宽度不再出现。应指出,将实际三维平板视为只有厚度的一维平板,不仅仅是由于平板长度与宽度远大于厚度的几何条件,更由于边界条件的保证。

本节介绍用分离变量法(精确分析解法之一)求解图 2-1 所示第一类与第三类边界条件下一维非稳态导热方程,简要介绍第二类边界条件下求解的特点,最后列举算例。

### 2.3.1 第一类边界条件

#### 2.3.1.1 问题的提法

如图 2-10 所示,平板厚度  $H$ ,平板材料密度  $\rho$ 、导热系数  $\lambda$  与比热容  $c$  均匀且为常数,板内无热源,平板的原始温度为  $t_0$ ,在时间  $\tau=0$  时,板的上、下两面与温度为  $t_p$  的热板紧密接触,且忽略接触界面的热阻,求热板上、下表面始终( $\tau>0$ )保持温度为  $t_p$  条件下平板内厚度方向上温度的变化,即求  $t(z, \tau)$ 。

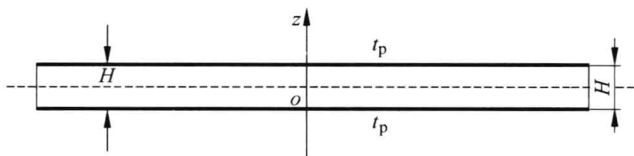


图 2-10 被上、下热板加热的一维平板

对照 2.2 节中式(2-2-28),它是本问题的控制方程:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-3-1)$$

在上、下表面温度相同,材料热物性参数为常数的条件下,平板内温度分布  $t(z, \tau)$  对中心线(图 2-10 中的虚线)对称。若将坐标原点取在这中心线上,对称的温度分布表现在  $z=0$  处温度取得极值,也即,  $\partial t / \partial z = 0$ ,若把这一对称性作为一个边界条件,而另一个边界条件是平板表面温度  $t_p$ ,则与方程式(2-3-1)一起构成求解半个平板厚度内温度分布的导热问题。由于这个问题的解具有对称性,它实质上代表着整个平板厚度内的温度分布。这样,边界条件与初始条件可写为

边界条件:

$$z = 0 \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (2-3-2)$$

$$z = \frac{H}{2} \quad t = t_p \quad (2-3-3)$$

初始条件:

$$\tau = 0 \quad t = t_0 \quad (2-3-4)$$

关于几何条件及物理条件的各参数在前面已经说明。

### 2.3.1.2 分离变量法求解

用分离变量法求解的问题,其基本形式应是线性、齐次的。在本问题中,边界条件(2-3-3)不符合这个条件,它是非齐次的(等号右边不为0)。为使整个问题成为齐次形式,特令

$$\theta(z, \tau) = \frac{t(z, \tau) - t_p}{t_0 - t_p} \quad (2-3-5)$$

将式(2-3-5)代入式(2-3-1)~式(2-3-4),使它们成为方程:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (2-3-6)$$

边界条件:

$$z = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (2-3-7)$$

$$z = \frac{H}{2} \quad \theta = 0 \quad (2-3-8)$$

初始条件:

$$\tau = 0 \quad \theta = 1 \quad (2-3-9)$$

方程(2-3-6)、边界条件(2-3-7)与(2-3-8)以及初始条件(2-3-9)构成的定解问题为线性、齐次问题。

用分离变量法求解问题的基本思路是:先令因变量 $\theta(z, \tau)$ 是自变量分别为 $z$ 与 $\tau$ 的两个函数 $Z(z)$ 与 $\Gamma(\tau)$ 的乘积,从而使偏微分方程(2-3-6)转化为变量分别为坐标 $z$ 与时间 $\tau$ 的两个常微分方程。以 $z$ 为变量的常微分方程与相应地边界条件构成偏微分方程问题的特征值问题,由特征值问题求得特征函数与特征值,这些特征函数与特征值连同以时间为变量的常微分方程的解构成偏微分方程的特解,常称基本解。再根据线性方程的解满足叠加原理这一特点,将基本解进行叠加,得到的便是偏微分方程的解,称为偏微分方程的形式解,其中含有待定常数。最后,根据特征函数的正交性,由初始条件确定形式解的常数,这样就得到了满足定解问题的解。下面将按照上述求解步骤,对由式(2-3-6)~式(2-3-9)构成的导热问题逐步进行求解。



### 1. 将一个偏微分方程分离成两个常微分方程

令

$$\theta(z, \tau) = Z(z)\Gamma(\tau) \quad (2-3-10)$$

将式(2-3-10)代入式(2-3-6),得

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \frac{1}{a\Gamma(\tau)} \frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} \quad (2-3-11)$$

由式(2-3-11)可清楚地看到,等号左边只是空间坐标  $z$  的函数,等号右边只是时间坐标  $\tau$  的函数。这样,式(2-3-11)成立的条件只能是等式两边都等于某一常数。常数的确定要符合本问题的物理含义。根据式(2-3-6)~式(2-3-9) 所示的问题,其最终解,即温度的变化,就平板整体而言,应该是从初始状态的  $t=t_0$  变到最终状态的  $t=t_p$ 。这意味着,函数  $\theta(z, \tau)$  取值范围是  $[0, 1]$ ,更具体地说,函数  $\theta(z, \tau)$  只能是从 1 变到 0 的单调函数。为此,式(2-3-11)只能等于负实数,如  $-\beta^2$  (更详尽的理由在后面解释)。这样,式(2-3-11)可写为

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \frac{1}{a\Gamma(\tau)} \frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} = -\beta^2 \quad (2-3-12)$$

式(2-3-12)实质上就是将式(2-3-6)所示的偏微分方程转化为两个常微分方程。也就是,把具有两个自变量( $z$  和  $\tau$ )的一个方程(2-3-6)变成了分别只有一个自变量( $z$  或  $\tau$ )的两个方程(2-3-12)[式(2-3-12)中有两个等号,代表着两个方程]。

### 2. 求解自变量为时间 $\tau$ 的一阶常微分方程

由式(2-3-12)所得到的第一个常微分方程为

$$\frac{1}{a\Gamma(\tau)} \frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} = -\beta^2$$

上式经整理可得

$$\frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} + a\beta^2 \Gamma(\tau) = 0 \quad (2-3-13)$$

式(2-3-13)所示的一阶常微分方程其一般解为

$$\Gamma(\tau) = e^{-a\beta^2 \tau} \quad (2-3-14)$$

将式(2-3-14)代入式(2-3-10),使式(2-3-10)成为

$$\theta(z, \tau) = Z(z)e^{-a\beta^2 \tau} \quad (2-3-15)$$

从式(2-3-15)可清楚地看到,其中  $e^{-a\beta^2 \tau}$  这一因子反映着平板内温度随时间变化的

特征。正是根据这一性质可知,式(2-3-11)所取的常数必须是负实数 $-\beta^2$ 。因为,如果此常数为正的实数,则由此可引起,只要 $Z(z)$ 不为零, $\theta(z, \tau)$ 的值将随 $\tau$ 的增长而趋于无穷大,这显然是不符合函数 $\theta(z, \tau)$ 取值范围应该在 $[0, 1]$ 范围内这一要求,也不符合实际导热过程。如果式(2-3-11)对应的常数为复数,它将使解表现为,平板在厚度方向温度分布随时间的变化规律呈现某种振荡,即厚度方向的温度分布不是坐标 $z$ 的单调函数。这种振荡温度变化在非周期变化的边界条件下是不可能出现的。

### 3. 求解自变量为空间坐标 $z$ 的二阶常微分方程

由式(2-3-12)所得到的第二个常微分方程为

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \beta^2 Z(z) = 0 \quad (2-3-16)$$

方程式(2-3-16)所对应的边界条件可从式(2-3-7)与式(2-3-8)得到,它们是

$$z = 0 \quad \frac{dZ(z)}{dz} = 0 \quad (2-3-17)$$

与

$$z = \frac{H}{2} \quad Z(z) = 0 \quad (2-3-18)$$

由式(2-3-16)~式(2-3-18)组成的问题是式(2-3-6)~式(2-3-9)所示原问题的一个辅助问题,称为原问题的特征值问题。

针对式(2-3-16)所示二阶常微分方程的特点, $\sin(\beta z)$ 与 $\cos(\beta z)$ 可以作为该方程的两个特解,而这两个特解的线性组合是该方程(2-3-16)的一般解

$$Z(z) = A \cos(\beta z) + B \sin(\beta z) \quad (2-3-19)$$

其中系数 $A$ 与 $B$ 是常数。

由边界条件(2-3-17),可得

$$\frac{dZ(z)}{dz} = -A\beta \sin(0) + B\beta \cos(0) = 0$$

上式成立的条件只能是系数 $B=0$ ,则式(2-3-19)成为

$$Z(z) = A \cos(\beta z) \quad (2-3-20)$$

再由边界条件(2-3-18),且令 $\mu = \beta H/2$ ,可得

$$\cos(\mu) = 0 \quad (2-3-21)$$

式(2-3-21)称为特征方程。为使式(2-3-21)成立,  $\mu$  只能取一系列离散的值, 即  $\mu_m$ , 且  $\mu_m = (2m-1)\pi/2, m=1, 2, \dots$ 。  $\mu_m$  称为特征值,  $\cos(\mu_m)$  称为特征函数。

由  $\mu = \beta H/2$  可得  $\beta = 2\mu/H$ , 且  $\beta_m = 2\mu_m/H$ , 将它们代入式(2-3-14)与式(2-3-20), 使式(2-3-14)与式(2-3-20)成为

$$\Gamma_m(\tau) = e^{-\mu_m^2 4a\tau/H^2} \quad m = 1, 2, \dots$$

与

$$Z_m(z) = A_m \cos(2\mu_m z/H) \quad m = 1, 2, \dots$$

上述两式分别是常微分方程(2-3-13)与(2-3-16)的特解, 将它们一起代入式(2-3-10), 可得

$$\theta_m = C_m \cos(\mu_m 2z/H) e^{-\mu_m^2 4a\tau/H^2} \quad (2-3-22)$$

对应任意一个特征值  $\mu_m$ ,  $\theta_m$  均为偏微分方程(2-3-6)的一个特解, 称作基本解。

由于式(2-3-6)是线性微分方程, 它的解满足叠加原理, 即基本解的叠加仍然是方程式(2-3-6)的解。为此, 把全部基本解叠加起来, 得到

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos(\mu_m 2z/H) e^{-\mu_m^2 4a\tau/H^2} \quad (2-3-23)$$

式(2-3-23)称为方程式(2-3-6)的形式解。由于解式(2-3-23)仍包含有待定常数  $C_m$ , 它还不是式(2-3-6)~式(2-3-9) 导热问题待求的解。

#### 4. 应用初始条件

常数  $C_m$  的确定有待于利用初始条件。为此, 将式(2-3-23)代入初始条件(2-3-9), 则

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos(\mu_m 2z/H) = 1 \quad (2-3-24)$$

将式(2-3-24)的等号两边都乘  $\cos(\mu_n 2z/H) dz$ ,  $n$  为整数(即  $n=1, 2, \dots$ ), 而后, 式(2-3-24)两边都从 0 到  $H/2$  进行定积分, 则式(2-3-24)变成为

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m \int_0^{H/2} \cos(\mu_n 2z/H) \cos(\mu_m 2z/H) dz = \int_0^{H/2} \cos(\mu_n 2z/H) dz \quad (2-3-25)$$

根据特征函数的正交性可知

$$\int_0^{H/2} \cos(\mu_n 2z/H) \cos(\mu_m 2z/H) dz = 0 \quad n \neq m \quad (2-3-26)$$

或

$$\int_0^{H/2} \cos(\mu_n 2z/H) \cos(\mu_m 2z/H) dz = \frac{H}{4} \quad n = m \quad (2-3-27)$$

将式(2-3-26)与式(2-3-27)代入式(2-3-25),可得

$$C_m = \frac{4}{H} \int_0^{H/2} \cos(\mu_m 2z/H) dz = \frac{2(-1)^{m+1}}{\mu_m} \quad (2-3-28)$$

### 5. 形成最终解

再将式(2-3-28)代入式(2-3-23),得到式(2-3-6)~式(2-3-9)所示问题的最终解为

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{\mu_m} \cos(\mu_m 2z/H) e^{-\mu_m^2 4a\tau/H^2} \quad (2-3-29)$$

将  $\mu_m = (2m-1)\pi/2$  代入式(2-3-29),使式(2-3-29)成为

$$\theta\left(\frac{z}{H}, \frac{a\tau}{H^2}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 4}{(2m-1)\pi} \cos\left[(2m-1)\pi \frac{z}{H}\right] e^{-(2m-1)^2 \pi^2 \frac{a\tau}{H^2}} \quad (2-3-30)$$

式(2-3-30)所示的数学形式可归结为因变量  $\theta$  是两个自变量  $z/H$  与  $a\tau/H^2$  的函数,且  $\theta, z/H$  与  $a\tau/H^2$  均为无量纲量。这里,  $a\tau/H^2$  是无量纲时间坐标,这个无量纲的时间被称为傅里叶数  $Fo$ ,  $Fo = a\tau/H^2$ 。  $z/H$  是无量纲的空间坐标,  $\theta$  则是无量纲温度。如式(2-3-30)这样的无量纲数学表达形式往往具有很大的概括性。它可把很多不同条件(不同定解条件)下具体现象都概括在这三个变量中。在 20 世纪四五十年代,工程界盛行的海斯勒图(Heisler chart)就是根据这类无量纲的关系式绘制成的。图 2-11 是按式(2-3-30)绘制成的曲线簇。图中,  $Fo$  为自变量,  $z/H$  为参变量,表示了在不同  $z/H$  条件下一组  $\theta$  随  $Fo$  变化的曲线。

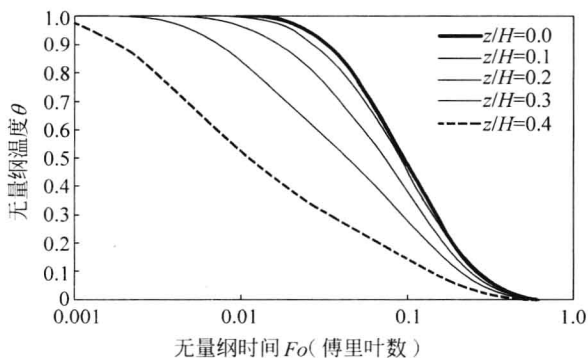


图 2-11 无量纲温度  $\theta$  随无量纲时间  $Fo$  的变化

### 2.3.2 第三类边界条件

本节的叙述在形式上与 2.3.1 节相同。为节省篇幅,对完全相同部分予以省略。

#### 2.3.2.1 问题的提法

如图 2-1(b)所示,已知平板厚度  $H$ ,平板材料密度  $\rho$ 、导热系数  $\lambda$  与比热容  $c$  均为常数,板内无热源,平板的原始温度为  $t_0$ ,在时间  $\tau=0$  时,板的上、下两个表面与温度为  $t_e$  的流体环境进行对流传热,已知表面传热系数为  $h$ ,求平板在此条件下 ( $\tau>0$ ) 温度的变化,即,求  $t(z, \tau)$ 。

本问题的控制方程同式(2-3-1),此处记作式(2-3-31),边界条件(2-3-2)保持不变,此处记作式(2-3-32),边界条件(2-3-3)改为

$$z = \frac{H}{2} \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial z} = h(t_e - t) \quad (2-3-33)$$

初始条件(2-3-4)保持不变,此处记作式(2-3-34)。

#### 2.3.2.2 分离变量法求解

令

$$\theta(z, \tau) = \frac{t(z, \tau) - t_e}{t_0 - t_e} \quad (2-3-35)$$

对比式(2-3-35)与式(2-3-5)可见,式(2-3-5)中的  $t_p$  被式(2-3-35)中的  $t_e$  所替代。

将式(2-3-35)代入式(2-3-31)~式(2-3-34),使它们成为方程:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (2-3-36)$$

边界条件:

$$z = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (2-3-37)$$

$$z = \frac{H}{2} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{h}{\lambda} \theta = 0 \quad (2-3-38)$$

初始条件:

$$\tau = 0 \quad \theta = 1 \quad (2-3-39)$$

由方程式(2-3-36)、边界条件的式(2-3-37)与式(2-3-38)以及初始条件的式(2-3-39)构成的定解问题为线性、齐次问题。适合用分离变量法进行求解。对比式(2-3-6)~式(2-3-9)与式(2-3-36)~式(2-3-39)可发现,两者不同之点是边界条件(2-3-8)与式(2-3-38)不同。本节求解的步骤与2.3.1节相同。

(1) 将一个偏微分方程分离成两个常微分方程。其中内容与2.3.1节相同。

(2) 求解自变量为时间 $\tau$ 的一阶常微分方程。其中内容与2.3.1节相同。

(3) 求解自变量为空间坐标 $z$ 的二阶常微分方程。

对比2.3.1节,这里的常微分方程问题与式(2-3-16)~式(2-3-18)问题的不同点是关于 $z=H/2$ 处的边界条件。对应于2.3.1节中式(2-3-18),此处更换成

$$z = \frac{H}{2} \quad \frac{\partial Z(z)}{\partial z} + \frac{h}{\lambda} Z(z) = 0 \quad (2-3-40)$$

将式(2-3-20)代入式(2-3-40),使式(2-3-40)成为

$$\mu \tan(\mu) = Bi \quad (2-3-41)$$

式(2-3-41)中的 $Bi$ 为毕渥数,其定义是

$$Bi = \frac{hH}{2\lambda} \quad (2-3-42)$$

式(2-3-41)为特征方程,它是一个超越方程,不能像式(2-3-21)那样可以直接求解。历史上,用图解法求得方程(2-3-41)的特征值 $\mu_m$ ,  $m=1,2,\dots$ 。在现代,用数值方法不难求解(详见4.3.2节)。

关于 $z$ 的二阶常微分方程的解其形式同式(2-3-23),此处将式(2-3-23)记作式(2-3-43)。

(4) 应用初始条件

通过利用初始条件来确定式(2-3-43)中的系数 $C_m$ ,与2.3.1节中得到表示 $C_m$ 的式(2-3-28)相仿,此处也可得到 $C_m$ ,只是过程更繁<sup>[16]</sup>,下面直接给出结果为

$$C_m = \frac{4 \sin(\mu_m)}{2\mu_m + \sin(2\mu_m)} \quad (2-3-44)$$

(5) 形成最终解

将式(2-3-44)代入式(2-3-43),得到由式(2-3-36)~式(2-3-39)构成的导热问题的最终解为

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin(\mu_m)}{2\mu_m + \sin(2\mu_m)} \cos(\mu_m 2z/H) e^{-\mu_m^2 4\alpha\tau/H^2} \quad (2-3-45)$$

或

$$\theta(z/H, Fo) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin(\mu_m)}{2\mu_m + \sin(2\mu_m)} \cos(\mu_m 2z/H) e^{-\mu_m^2 Fo} \quad (2-3-46)$$

同样,式(2-3-46)所示的数学形式可归结为因变量  $\theta$  是两个自变量  $z/H$  与  $Fo$  的函数。特征值  $\mu_m$  为参变量。

### 2.3.3 第二类边界条件

第二类边界条件如式(2-2-34),给定边界上温度的导函数,在物理上常常是给定热流密度。这样的边界条件对温度  $t$  为非齐次边界条件,问题的求解就有一些新的矛盾有待处理。常用的办法是,根据一维导热的特点,利用下式:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \quad (2-3-47)$$

将原有因变量为温度  $t$  的问题转化为因变量为热流密度  $q$  的问题,其微分方程的形式仍可保持不变,只将式(2-3-1)中的  $t$  更换成  $q$ 。原问题(对温度  $t$ )的第二类边界条件转化为(对热流密度  $q$ )第一类边界条件,如  $z=H/2, q=q_p$ 。这里的  $q_p$  是平板表面上的热流密度。这样,即可按 2.3.1 节所介绍的求解温度的方法对热流密度进行求解,待求得解之后,再由式(2-3-47)逆变到关于温度问题的解。在逆变过程中要注意对不定积分中所含常数的处理。读者欲知求解详细过程,参阅文献[16]。

### 2.3.4 算例

本算例的已知条件如下:平板厚度  $H=12\text{ mm}$ ,初始温度  $t_0=20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,表面温度  $t_p=200\text{ }^{\circ}\text{C}$ (第一类边界条件),平板材料的密度  $\rho=600\text{ kg/m}^3$ ,导热系数  $\lambda=0.1\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,比热容  $c=1130\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ,相应地,热扩散率为  $a=\lambda/(\rho c)=0.15\times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ 。将这些参数代入式(2-3-30)及其变形的形式,即可求得平板内温度分布与热流密度分布随时间变化的规律。

本算例给出的已知参数参照文献[18]中所列的木材人造板及其加工工艺条件。

## (1) 平板内温度分布随时间变化规律

为了更直观地表现平板内温度分布随时间变化  $t(z, \tau)$ , 可将式(2-3-30)所示的  $\theta(z, \tau)$  代入式(2-3-5)等号左边, 经整理后即可得

$$t(z, \tau) = t_p - (t_p - t_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 4}{(2m-1)\pi} \cos \left[ (2m-1)\pi \frac{z}{H} \right] e^{-(2m-1)^2 \pi^2 \frac{\alpha \tau}{H^2}} \quad (2-3-48)$$

根据式(2-3-48)可知平板内厚度方向温度分布  $t(z, \tau)$  随变量  $\tau, z, t_p, t_0, H$  及  $a$  的变化规律。上述这些变量中, 时间  $\tau$  与板内空间位置  $z$  是自变量, 而其他诸量, 平板初始温度  $t_0$ 、平板表面温度  $t_p$ 、平板厚度  $H$  及热扩散率  $a$  均为参变量, 它们在定解条件中已给出。将这些参数代入式(2-3-48), 即可求得  $t(z, \tau)$ , 在此基础上绘制图 2-12 与图 2-13。图 2-12 表示平板内若干地点 ( $z/H=0.0, 0.1, 0.2, 0.4$  及  $0.5$ ) 温度随时间的变化。 $z/H=0.0$  与  $0.5$  分别代表平板的中心与平板表面。由图 2-12 可知, 在加热开始后, 靠近平板表面处 ( $z/H=0.4$ ) 的温度增长迅速而后逐渐趋缓, 而在板的中心处 ( $z/H=0$ ), 温度变化明显的滞后, 先是缓慢上升而后逐渐加快, 到一定时间后, 又渐渐放慢。

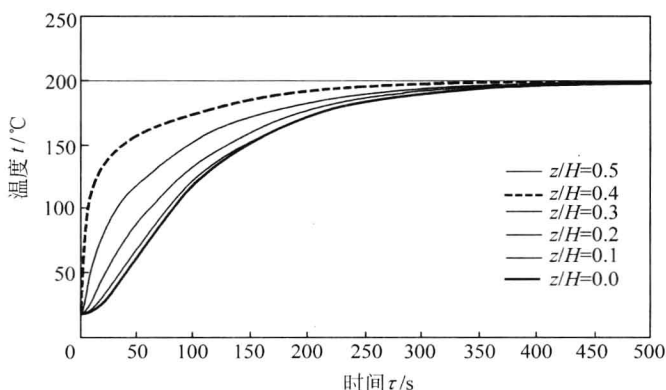


图 2-12 平板内若干地点温度随时间变化

式(2-3-48)所示的温度分布是在  $[0, H/2]$  区域内成立。由于此温度分布对图 2-10 中的  $z=0$  中心线对称, 式(2-3-48)所示的温度分布可扩充到  $[-H/2, 0]$  区域, 由此得到图 2-13 所示被加热的平板内在不同时刻 ( $\tau=1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 125, 250$  及  $500$  s) 的温度分布。由图可知, 平板内的温度分布从加热开始就逐渐趋于平坦, 到大约  $500$  s 时, 几乎完全均匀。



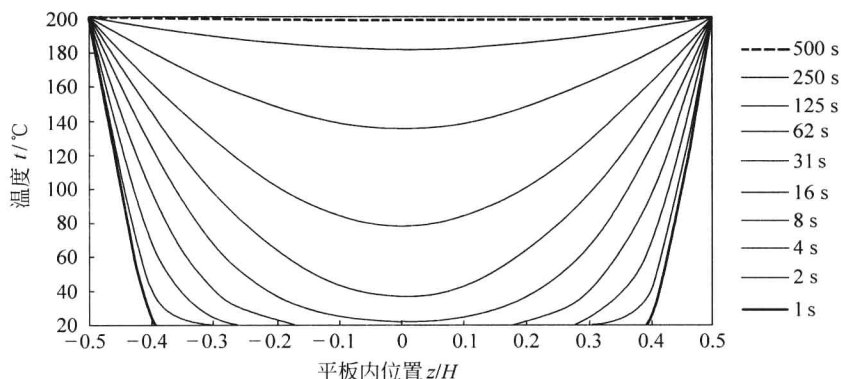


图 2-13 平板内在若干时刻的温度分布

### (2) 平板内热流密度分布随时间变化规律

根据傅里叶定律,在已知物体内部温度场后即可求得温度梯度场及热流密度向量场。对于一维非稳态导热的温度场,其热流由表面流向中心,热流密度如式(2-3-47)所示,根据式(2-3-47),将式(2-3-48)的  $t(z, \tau)$  对  $z$  求导数,即可得到平板内热流密度的分布及其变化规律为

$$q(z, \tau) = \lambda(t_p - t_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 4}{L} \sin \left[ (2m-1) \pi \frac{z}{H} \right] e^{-(2m-1)^2 \pi^2 \frac{a\tau}{H^2}} \quad (2-3-49)$$

图 2-14 显示了在  $z/H=0.0, 0.1, 0.2, 0.4$  及  $0.5$  处的热流密度随时间的变化

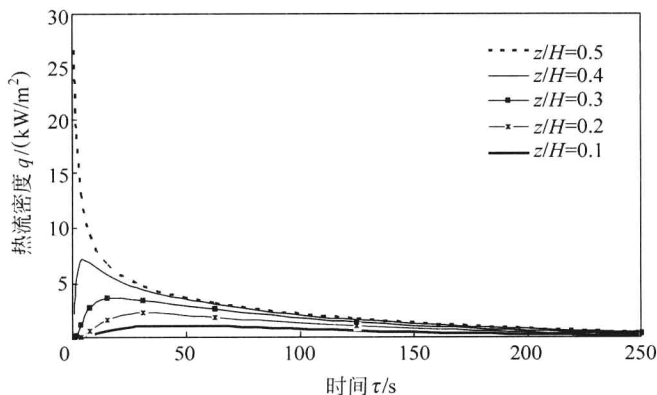


图 2-14 平板内若干地点热流密度随时间变化

化。由图 2-14 可知,从表面( $z/H=0.5$ )到中心( $z/H=0$ ),热流密度由大到小。这是因为从表面传入的热量,一部分被用于加热当地物质使其温度升高,而剩余的另一部分被继续传向中心,直到中心处热流密度为零。由平板表面处的热流密度的曲线走向可知,热板对平板加热所输入的热流由开始的最大值而迅速下降,而在平板内部各处( $z/H=0.4, 0.3, 0.2, 0.1$ ),热流密度都是经历了由 0 逐渐加大至最大值而后再减小的过程。

## 2.4 一维非稳态导热问题数值解

本节介绍有限差分法求解如图 2-10 所示的一维非稳态导热问题。为此,必须先将导热问题演绎成差分形式。也就是,建立对应于导热问题的差分方程,由这些差分方程构成代数方程组。

建立差分方程有两种途径。途径一,将包括边界的求解域(空间区域与时间区域)离散成有限个节点,对每个节点,用差分代替微分,用差商代替微商,将微分方程转化为有限个节点上的差分方程,由差分方程全体构成代数方程组。途径二,将求解域(空间区域)划分成有限个单元(也称控制容积或控制单元),对每个单元建立代数形式的能量平衡关系式,这些单元能量平衡关系式的总体构成一组代数方程。下面先分别介绍通过两种途径建立差分方程,然后介绍求解由差分方程构成代数方程组的方法,以代数方程的解作为导热微分方程问题的近似解。最后,举例比较数值解与精确解的结果。

### 2.4.1 用差商代替微商建立差分方程

建立差分方程的过程可表述成如下步骤。

#### 1. 将求解区域离散化

图 2-10 所示的一维非稳态平板导热问题的求解域是  $z$  坐标上长度为  $H$  的线段,即  $[0, H]$ ,这里  $z=0$  对应于平板的下表面。求解区域离散化就是把连续的线段  $[0, H]$  从  $z=0$  到  $z=H$  进行离散化处理。如图 2-15 所示,将区域  $[0, H]$  离散成  $J_Z$  个节点,节点间有  $J_Z-1$  个间距。连续自变量  $z$  离散成间距相同(或不相同)的有限个节点  $z_j$ ,下标  $j$  表示空间位置的次序,即  $z_1, z_2, \dots, z_{J_Z}$ 。两邻近节点的距离  $\Delta z$ ,称为空间步长,  $\Delta z = z_{j+1} - z_j, j=1, 2, \dots, J_Z-1$ ,  $z=0$  与  $z=H$  对应于  $z_1$  与  $z_{J_Z}$ 。若节点间距离相同,  $\Delta z = H/(J_Z-1)$ ,称为等步长。节点间的距离  $\Delta z$  也可以不同,称为变步长,则  $\Delta z$  写作  $\Delta z_j$ 。

顺便提及,上述  $J_Z$  即为  $J_Z$ ,当作为变量的下标,或作为  $j$  的顺序号时,写作

$JZ$ , 而作为数量, 尤其是出现在计算公式中时, 写作  $J_z$ 。以后出现类似情形, 不再专门说明。

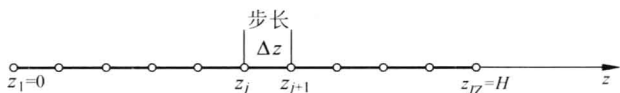


图 2-15  $[0, H]$  连续区域内离散节点与步长

与空间连续区域离散化相仿, 时间区域也需离散化, 即将连续的时间域  $[0, \tau_{\max}]$  内的自变量  $\tau$  变成一系列离散的时刻  $\tau^n$ , 用上标  $n$  表示时间在不同的时刻,  $n=1, 2, \dots$ 。两个离散时刻之间的时间间隔  $\Delta\tau$ ,  $\Delta\tau = \tau^{n+1} - \tau^n$ , 称为时间步长, 如图 2-16 所示。

在将自变量  $z$  离散成  $z_j$ , 自变量  $\tau$  离散成  $\tau^n$  的同时, 相应地因变量  $t$  离散成  $t_j^n, t_j^{n+1}$  等。

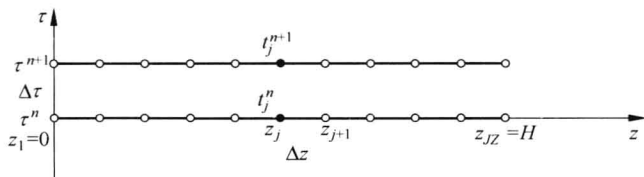


图 2-16 空间与时间连续区域内离散节点

## 2. 在节点上用差商代替微商

离散化后的求解区域就是将离散的节点代替连续的区域, 相应地, 原本在求解域内的连续函数将转变成离散节点上的函数值, 连续的导数(即微商)转变成离散的差商。即, 用  $\Delta t / \Delta \tau$  代替  $dt/d\tau$ , 用  $\Delta t / \Delta z$  代替  $dt/dz$ 。

函数  $t(\tau)$  对时间  $\tau$  的差商  $\Delta t / \Delta \tau$  表示为

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t^{n+1} - t^n}{\Delta \tau} \quad (2-4-1)$$

由于时间坐标只有一个方向, 总是由小到大, 时间不会倒流。所以, 称时间坐标为单通道坐标。若时间步长  $\Delta\tau$  是一个常数, 称其等时间步长, 若时间步长是变化的, 称其为变时间步长。在实际数值计算中, 如何正确选取时间步长对整个计算往往至关重要, 如若不慎, 会导致计算失败。

函数  $t(z)$  对自变量  $z$  的导数(即微商)的定义为

$$\frac{dt}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta z}$$

式中,微商  $dt/dz$  是差商  $\Delta t/\Delta z$  的极限,也就是,微商是差分  $\Delta z$  趋于无限小时的差商。当  $\Delta z$  是有限差分,  $\Delta t/\Delta z$  就是有限差商,它是微商的一种近似,步长  $\Delta z$  越小,差商  $\Delta t/\Delta z$  越逼近微商  $dt/dz$ 。

下面介绍用怎样的差商  $\Delta t/\Delta z$  来代替微商  $dt/dz$ 。

### 3. 一阶差商与二阶差商的表示

函数  $t(z)$  对空间坐标  $z$  的一阶差商  $\Delta t/\Delta z$  可表示为

$$\frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{t_{j+1} - t_j}{\Delta z} \quad (2-4-2)$$

或

$$\frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{t_j - t_{j-1}}{\Delta z} \quad (2-4-3)$$

或

$$\frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{t_{j+1} - t_{j-1}}{2\Delta z} \quad (2-4-4)$$

式(2-4-2)~式(2-4-4)分别被称为函数  $t(z)$  对空间坐标  $z$  的前(右)差商、后(左)差商与中心差商,它们的不同几何含义表示在图 2-17。显然,当  $\Delta z$  趋于无限小时,式(2-4-2)~式(2-4-4)三者都趋于  $dt/dz$ ,但在有限差分条件下,三者有所不同。总之,对空间坐标一阶差商而言,在一个地点可以有多种表示形式。在实际计算中用哪一种差商来代替微商,须视具体条件而定。在某些情况下,能否正确选取一阶差商表达式也会成为计算成败的关键。

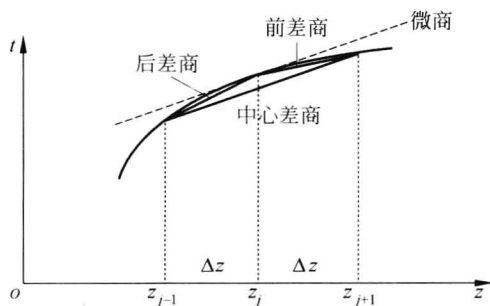


图 2-17 一阶微商的前差商、后差商及中心差商

函数  $t(z)$  对空间坐标  $z$  的二阶差商  $\frac{\Delta}{\Delta z} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right)$  常表示为

$$\frac{\Delta}{\Delta z} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) = \frac{\frac{t_{j+1} - t_j}{\Delta z} - \frac{t_j - t_{j-1}}{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{t_{j+1} - 2t_j + t_{j-1}}{\Delta z^2} \quad (2-4-5)$$

式(2-4-5)显示,函数在一个节点上的二阶差商可表示为该节点处一阶前差商与一阶后差商的差商。

#### 4. 微分方程转化为差分方程

将上述表示时间差商的式(2-4-1)与表示空间差商的式(2-4-5)分别代入微分方程式(2-3-1)等号两边,即可得到

$$\rho c \frac{t_j^{n+1} - t_j^n}{\Delta \tau} = \lambda \frac{t_{j-1} - 2t_j + t_{j+1}}{\Delta z^2} \quad n = 1, 2, \dots; j = 2, 3, \dots, JZ - 1 \quad (2-4-6)$$

式(2-4-6)是微分方程(2-3-1)所对应的差分方程。

#### 5. 边界节点差分方程

由于本问题的边界条件是给定温度  $t_p$ , 即第一类边界条件, 则令边界温度  $t_p$  为上、下表面处节点的温度, 则

$$z = 0 \quad t_1^n = t_p \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-4-7)$$

与

$$z = H \quad t_{JZ}^n = t_p \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-4-8)$$

初始条件为

$$\tau = 0 \quad t_j^1 = t_0 \quad j = 2, 3, \dots, JZ - 1 \quad (2-4-9)$$

至此, 将式(2-3-1)~式(2-3-4)所示的微分方程导热定解问题转化为式(2-4-6)~式(2-4-9)所示的差分方程导热定解问题。

### 2.4.2 用控制单元建立差分方程

与途径一相仿, 差分方程的建立可按下列步骤:

#### 1. 将空间求解域离散成有限个单元

将平板所处的连续区域  $[0, H]$ , 从  $z=0$  到  $z=H$  划分成尺度相同或不不同的有限个单元(也称控制容积), 对它们从  $z=0$  到  $z=H$  进行编号, 如  $j=1, 2, \dots, JZ$ , 每个单元对应一个节点, 如图 2-18 所示。  $z=0$  与  $z=H$  对应于  $j=1$  与

$j=JZ$  的边界单元, 它们的尺度  $\delta z$  是  $\Delta z/2$ , 其余内单元的尺度  $\delta z$  都是  $\Delta z$ ,  $\Delta z = H/(JZ-1)$ 。每个单元都对应一个节点, 以代表该单元。图 2-18 中,  $j=1$  与  $j=JZ$  的节点置于单元的边界, 其余内部节点都置于单元的中心。这里, 单元与节点的个数相同, 节点间的间距  $\Delta z$  也相同, 而边界单元与内单元的尺度不同。

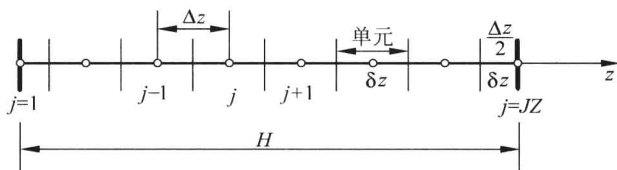


图 2-18  $[0, H]$  连续区域内单元划分及节点布置

时间区域离散化与 2.4.1 节中介绍的途径一相同。

## 2. 内单元差分方程

内单元是指不处在平板上、下表面的单元, 即  $j=2, 3, \dots, JZ-1$  所对应的那些单元。建立这些单元能量平衡关系式的原则是, 每个单元通过其边界以导热方式在单位时间内传入单元的热量等于该单元在单位时间内能量的增加, 其数学表示为

$$\lambda \frac{t_{j-1} - t_j}{\Delta z} + \lambda \frac{t_{j+1} - t_j}{\Delta z} = \rho c \Delta z \frac{t_j^{n+1} - t_j^n}{\Delta \tau} \quad (2-4-10)$$

此式稍加整理即可得到与式(2-4-6)相同的结果。

## 3. 边界单元差分方程

由于本问题的边界条件是给定温度  $t_p$ , 即第一类边界条件, 则令边界温度  $t_p$  为上、下表面单元的温度,

$$t_l = t_p \quad (2-4-11)$$

与

$$t_{JZ} = t_p \quad (2-4-12)$$

初始条件与式(2-4-9)相同, 此处记作式(2-4-13)。

至此, 用控制容积法建立了由式(2-4-10)~式(2-4-13) 所示代数形式的导热定解问题。对照式(2-4-6)~式(2-4-9), 两者相同。

对于图 2-1(b)所示的情形, 其中边界条件与本问题不同, 相应地有关边界节点的差分方程也与式(2-4-11)、式(2-4-12)不同, 请读者自行推导, 也可参阅第 5、

6 章中相关章节。

对一维连续区域单元与节点的划分与布置还有其他方案,如图 2-19 所示。

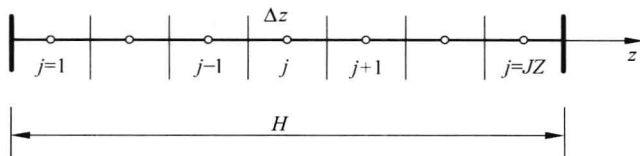


图 2-19  $[0, H]$  连续区域内单元划分及节点布置

这里将连续区域  $[0, H]$  划分成  $JZ$  个尺度相同的单元,节点都置于单元中心,节点间的步长都相同,节点与单元的个数也相同。但在差分方程的建立与边界条件的处理方面与上述式(2-4-10)~式(2-4-13)有一些差别,它们在 2.5 节及以后若干章节中将逐一说明。

### 2.4.3 差分方程的求解

式(2-4-6)~式(2-4-9)与式(2-4-10)~式(2-4-13) 都可表示为

$$t_j^{n+1} - t_j^n = f(t_{j-1} - 2t_j + t_{j+1}) \quad j = 2, 3, \dots, JZ - 1; \quad \tau > 0 \quad (2-4-14)$$

$$t_j = t_p \quad j = 1; \quad \tau \geq 0 \quad (2-4-15)$$

$$t_j = t_p \quad j = JZ; \quad \tau \geq 0 \quad (2-4-16)$$

$$t_j = t_0 \quad j = 2, 3, \dots, JZ - 1; \quad \tau = 0 \quad (2-4-17)$$

式中,

$$f = \frac{\lambda \Delta \tau}{\rho c (\Delta z)^2} = \frac{a \Delta \tau}{\Delta z^2} \quad (2-4-18)$$

请注意,式(2-4-14)等号右边关于因变量  $t_{j-1}$ 、 $t_j$  与  $t_{j+1}$  没有上角标,没有注明是  $n$  或  $n+1$ ,即没有说明是当今时刻还是上一个时刻。这是因为,因变量的上角标为  $n$  或  $n+1$ ,将构成不同形式的差分方程。相应地,它们求解的方法也完全不同。这些不同形式的差分方程中最典型的是显式差分方程与完全隐式差分方程,下面分别予以介绍。

#### 1. 显式差分方程

若将式(2-4-14)等号右边各项中包含的  $t_{j-1}$ 、 $t_j$  与  $t_{j+1}$  的上角标都定为  $n$ ,则式(2-4-14)将成为

$$t_j^{n+1} = ft_{j-1}^n + (1-2f)t_j^n + ft_{j+1}^n \quad j = 2, 3, \dots, JZ-1 \quad (2-4-19)$$

作为边界条件的式(2-4-15)与式(2-4-16),其中  $t_j$  的上角标为  $n$ ,即  $t_j = t_j^n$ ,初始条件(2-4-17)中  $t_j$  的上角标为 1。

式(2-4-19)的求解过程展现在图 2-20 所示的时间( $\tau$ )与空间( $z$ )区域内。当过程开始的那一时刻,平板各处的温度都是已知的,也就是,对应在图 2-20 中  $n=1$  这一排上各节点的温度值都是已知的。除了  $j=1$  与  $j=JZ$  处的温度  $t$  为平板表面温度  $t_p$  之外,其余各节点的温度  $t_j^1$  ( $j=2, 3, \dots, JZ-1$ )都是初始温度  $t_0$ 。接着,可用式(2-4-19)算得  $n=2$  这一排上各点的温度  $t_j^2$  ( $j=2, 3, \dots, JZ-1$ )。以此类推,即可求得图 2-20 所示域内全部节点的温度。式(2-4-19)的一个明显的特点是,节点(也是单元) $j$  某一时刻( $n+1$ )的温度  $t_j^{n+1}$  只依赖于前一时刻( $n$ )该节点及其邻近节点的温度  $t_j^n$ 、 $t_{j-1}^n$  与  $t_{j+1}^n$ ,如图 2-20 中显示的,一个黑色圆圈(当前时刻的温度  $t_j^{n+1}$ )依赖三个白色圆圈(前一时刻当地与邻近节点处的温度  $t_{j-1}^n$ 、 $t_j^n$  与  $t_{j+1}^n$ )。这种当前时刻温度可用前一时刻温度直接表示出来的格式称为显式格式,相应得到的差分方程称为显式差分方程。

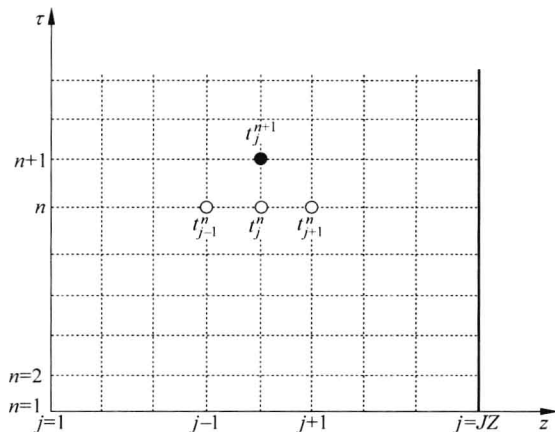


图 2-20 显式差分方程前、后时刻的温度关系

式(2-4-19)还可作这样的解释,即  $t_j^{n+1}$  是  $t_j^n$ 、 $t_{j-1}^n$  与  $t_{j+1}^n$  三者的加权平均,权系数为  $f$  和  $(1-2f)$ 。毫无疑问,权系数都不应该小于 0,也不应该大于 1。为此,如下不等式必须被保证

$$1 \geq 1-2f \geq 0 \quad (2-4-20)$$



也即

$$0 \leq f \leq \frac{1}{2} \quad (2-4-21)$$

或

$$0 < \Delta\tau \leq \frac{\Delta z^2}{2a}$$

保证上述不等式的成立是保证显式差分方程式(2-4-19)能顺利进行计算的必要条件,也称稳定性条件。

应该指出,式(2-4-21)成立的条件是针对第一类与第二类边界条件,关于第三类边界条件下的稳定性条件,式(2-4-21)尚需修正。

## 2. 完全隐式差分方程

若将式(2-4-14)中  $t_{j-1}$ 、 $t_j$  与  $t_{j+1}$  的上角标都定为  $n+1$ ,则式(2-4-14)成为

$$-ft_{j-1}^{n+1} + (1+2f)t_j^{n+1} - ft_{j+1}^{n+1} = t_j^n \quad j=2,3,\dots,JZ-1 \quad (2-4-22)$$

作为边界条件的式(2-4-15)与式(2-4-16),其中  $t_j$  的上角标为  $n+1$ ,即  $t_j = t_j^{n+1}$ ,初始条件的式(2-4-17)中  $t_j$  的上角标为 1。

式(2-4-22)的计算特点如图 2-21 所示,三个黑圆圈(当前时刻相互邻近节点的温度  $t_{j-1}^{n+1}$ 、 $t_j^{n+1}$  与  $t_{j+1}^{n+1}$ )依赖一个白圆圈(前一时刻当地温度  $t_j^n$ )。显然,它与显式差分方程式(2-4-19)不同,式(2-4-22)不可能独立求解。为此,必须对从  $j=2$  到  $j=JZ-1$  的全部方程联立求解。

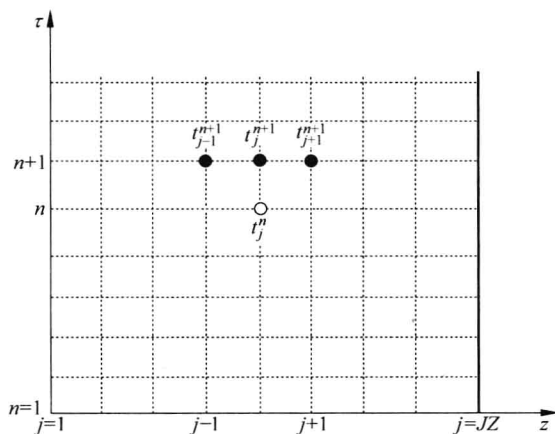


图 2-21 完全隐式差分方程前、后时刻的温度关系

为便于叙述,也便于读者理解,将式(2-4-22)联同边界条件一起,改写成矩阵的形式

$$[A][t]^{n+1} = [D] \quad (2-4-23)$$

也即

$$\begin{vmatrix} 1+2f & -f & & & \\ -f & 1+2f & -f & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -f & 1+2f & -f \\ & & & -f & 1+2f \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_2^{n+1} \\ t_3^{n+1} \\ \vdots \\ t_{JZ-2}^{n+1} \\ t_{JZ-1}^{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ft_p + t_2^n \\ t_3^n \\ \vdots \\ t_{JZ-2}^n \\ ft_p + t_{JZ-1}^n \end{vmatrix} \quad (2-4-24)$$

从式(2-4-24)看到,系数矩阵的特点是,它仅在主对角线及相邻两条对角线上有非零元素,此矩阵称为“三对角矩阵”。这一特点给方程组求解带来方便,即可用追赶法<sup>[19]</sup>求解。

下面介绍用追赶法求解方程组(2-4-24)的过程。为便于叙述与理解,将式(2-4-24)再改写成更符合代数运算的形式

$$\begin{cases} bt_2^{n+1} + ct_3^{n+1} = d_2 \\ at_{j-1}^{n+1} + bt_j^{n+1} + ct_{j+1}^{n+1} = d_j \quad j = 3, 4, \dots, JZ-2 \\ at_{JZ-2}^{n+1} + bt_{JZ-1}^{n+1} = d_{JZ-1} \end{cases} \quad (2-4-25)$$

式中,  $a=c=-f$ ;  $b=1+2f$ ;  $d_2=ft_p+t_2^n$ ;  $d_{JZ-1}=ft_p+t_{JZ-1}^n$ ;  $d_j=t_j^n$  ( $j=3, 4, \dots, JZ-2$ )。

为求解方程组(2-4-25),先从其中的第一个( $j=2$ )方程入手,为此将其改写成

$$t_2^{n+1} = -\frac{c}{b}t_3^{n+1} + \frac{d_2}{b} \quad (2-4-26)$$

这是用  $t_3^{n+1}$  表示  $t_2^{n+1}$  的公式,简写成

$$t_2^{n+1} = U_2 t_3^{n+1} + V_2 \quad (2-4-27)$$

式中

$$U_2 = -\frac{c}{b}, \quad V_2 = \frac{d_2}{b}$$

将式(2-4-27)代入方程组(2-4-25)中的第二个( $j=3$ )方程,可得

$$a(U_2 t_3^{n+1} + V_2) + b t_3^{n+1} + c t_4^{n+1} = d_3$$

上式整理后可得

$$t_3^{n+1} = -\frac{c}{aU_2 + b} t_4^{n+1} + \frac{d_3 - aV_2}{aU_2 + b}$$

这是用  $t_4^{n+1}$  表示  $t_3^{n+1}$  的公式,简写成

$$t_3^{n+1} = U_3 t_4^{n+1} + V_3 \quad (2-4-28)$$

其中

$$U_3 = -\frac{c}{aU_2 + b}, \quad V_3 = \frac{d_3 - aV_2}{aU_2 + b}$$

一般而言,用  $t_{j+1}^{n+1}$  表示  $t_j^{n+1}$  的公式可简写成

$$t_j^{n+1} = U_j t_{j+1}^{n+1} + V_j \quad (2-4-29)$$

式中

$$U_j = -\frac{c}{aU_{j-1} + b}, \quad V_j = \frac{d_j - aV_{j-1}}{aU_{j-1} + b}$$

以此类推,当  $j = JZ - 2$ ,可得

$$t_{JZ-2}^{n+1} = U_{JZ-2} t_{JZ-1}^{n+1} + V_{JZ-2} \quad (2-4-30)$$

式中

$$U_{JZ-2} = -\frac{c}{aU_{JZ-3} + b}, \quad V_{JZ-2} = \frac{d_{JZ-2} - aV_{JZ-3}}{aU_{JZ-3} + b}$$

式(2-4-30)与方程组(2-4-25)最后一个( $j = JZ - 1$ )方程构成二元一次联立方程组,由此求得

$$t_{JZ-1}^{n+1} = \frac{d_{JZ-1} - aV_{JZ-2}}{aU_{JZ-2} + b} \quad (2-4-31)$$

利用由式(2-4-31)求得的  $t_{JZ-1}^{n+1}$ ,将其代入式(2-4-30),即得  $t_{JZ-2}^{n+1}$ ,再利用式(2-4-29),由已知  $t_{j+1}^{n+1}$  求未知  $t_j^{n+1}$ 。这样就依次求得  $t_{JZ-2}^{n+1}, t_{JZ-3}^{n+1}, \dots, t_2^{n+1}$ 。

综上所述,方程组的求解过程可分两个步骤。第一步,顺次序,依次确定系数  $U_2, V_2, U_3, V_3, \dots, U_{JZ-2}, V_{JZ-2}$ ,为顺追赶;第二步,逆次序,依次求得温度  $t_{JZ-1}, t_{JZ-2}, \dots, t_2$ ,为逆追赶。追赶法在文献中惯称 TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm)法。

式(2-4-23)中系数矩阵 $[A]$ 的另一个特点是,主对角线上元素的绝对值大于同一行中其他元素绝对值之和,这一特点被称作矩阵具有主对角线优势。这种对角线优势的矩阵不仅能保证方程组的解具有唯一性,而且在计算 $U_j$ 、 $V_j$ 及 $t_j^{n+1}$ 时不会出现分母为零的情况。

追赶法作为求解隐式差分格式而言对于第一、二、三类边界条件都是适用的,只是某些细节有些差别。

#### 2.4.4 算例

这里列举的算例与2.3.4节中算例相同,只是这里是用数值方法求解。

先讨论由式(2-4-19),联同式(2-4-15)~式(2-4-17)所构成的一组显式差分方程。如前所述,使用显式差分方程必须保证不等式(2-4-21)成立,也即

$$\Delta\tau < \frac{\Delta z^2}{2a} \quad (2-4-32)$$

由式(2-4-32)可知,时间步长 $\Delta\tau$ 的选取与平板材料的热扩散率 $a$ 有关,还与空间步长 $\Delta z$ 的选取有关。本例中, $H=12\text{ mm}$ , $\Delta z=H/10=1.2\text{ mm}$ , $a=0.15\times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ 。相应地, $\Delta z^2/(2a)\approx 4.8\text{ s}$ ,本算例取 $\Delta\tau=1.0\text{ s}$ ,足以保证计算稳定。

图2-22显示了计算的结果。如果只从图线上看,图2-22所示的曲线与由精确解得到的由图2-12所示的曲线几乎相同。若仔细对比列在表2-1与表2-2的这些曲线所对应的数据(参见用黑体标出的两行数据),可以发现它们间的微小差别。

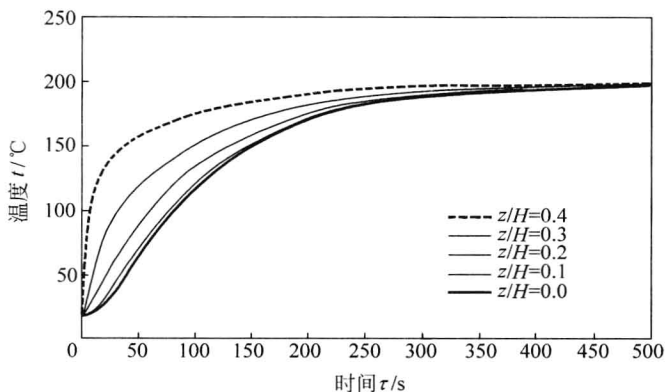


图 2-22 由显式差分方程得到的平板内若干地点温度随时间变化

表 2-1 由精确解法得到的结果

$\tau/s$	$z/H$					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	20.00	20.00	20.00	20.00	24.56	200.00
2	20.00	20.00	20.00	20.28	40.49	200.00
4	20.00	20.00	20.14	24.56	67.44	200.00
8	20.03	20.28	23.19	40.49	97.25	200.00
16	21.87	24.71	36.85	67.44	123.71	200.00
31	37.32	43.68	63.44	97.54	144.74	200.00
62	78.40	84.26	101.33	128.13	162.13	200.00
125	135.21	138.38	147.58	161.91	179.98	200.00
<b>250</b>	<b>181.68</b>	<b>182.58</b>	<b>185.18</b>	<b>189.23</b>	<b>194.34</b>	<b>200.00</b>
500	198.54	198.61	198.82	199.14	199.55	200.00

表 2-2 由显式差分方程得到的结果

$\tau/s$	$z/H$					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	20.00	20.00	20.00	20.00	38.44	200
2	20.00	20.00	20.00	21.89	53.10	200
4	20.00	20.02	20.66	28.51	74.68	200
8	20.13	20.70	25.01	44.38	100.56	200
16	22.89	26.12	39.08	69.95	125.34	200
31	38.24	44.52	64.06	97.88	144.87	200
62	78.61	84.44	101.46	128.19	162.15	200
125	135.50	138.66	147.82	162.09	180.07	200
<b>250</b>	<b>181.70</b>	<b>182.59</b>	<b>185.19</b>	<b>189.24</b>	<b>194.34</b>	<b>200</b>
500	198.53	198.60	198.81	199.13	199.55	200

在已知温度分布后,一维非稳态热流密度分布可由式(2-3-47)的差分形式,即可由下式

$$q = \lambda \frac{t_{j+1} - t_j}{\Delta z} \tag{2-4-33}$$

求得。相应结果绘制在图 2-23 上。如果将它与精确解法得到的结果(见图 2-14)进行对比,即可发现,两者有较大的差别[注意:两图中纵坐标不同]。究其原因,是由于  $\Delta z$  取得过大。若减小  $\Delta z$  的值,  $\Delta z = H/20$ , 由此得到的结果与精确解就接近多了,若继续减小  $\Delta z$ ,还可使数值解法的结果更趋近精确解的结果。

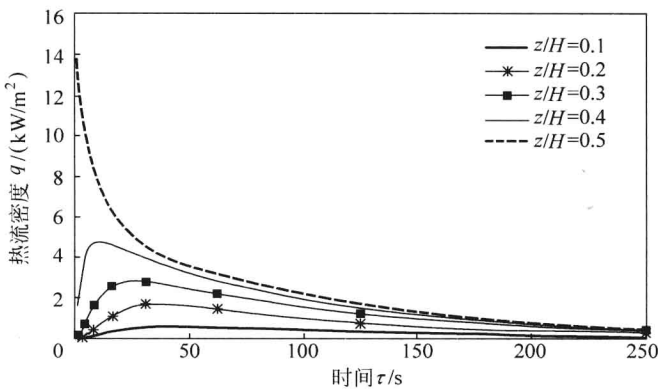


图 2-23 由显式差分方程得到的平板内若干地点热流密度随时间变化

现在我们讨论由式(2-4-22),联同式(2-4-15)~式(2-4-17)所构成的一组完全隐式差分方程的求解。其中时间步长与空间步长与用显式格式计算时相同,所得的计算结果列于表 2-3。对比表 2-2 与表 2-3 中数据可发现,用不同差分格式进行计算所得结果会有差别。

表 2-3 由完全隐式差分方程得到的结果

$\tau/s$	$z/H$					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	20.00	20.01	20.11	21.32	35.42	200.00
2	20.01	20.04	20.40	23.54	48.40	200.00
4	20.06	20.23	21.57	29.57	68.83	200.00

续表

$\tau/s$	$z/H$					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
8	20.51	21.36	26.00	43.58	95.48	200.00
16	23.90	26.98	39.02	67.95	122.51	200.00
31	38.79	44.70	63.37	96.50	143.70	200.00
62	78.01	83.82	100.79	127.59	161.79	200.00
125	134.69	137.89	147.16	161.61	179.82	200.00
<b>250</b>	<b>181.23</b>	<b>182.15</b>	<b>184.82</b>	<b>188.97</b>	<b>194.20</b>	<b>200.00</b>
500	198.45	198.53	198.75	199.09	199.52	200.00

综上所述,从对比关于一维非稳态导热问题的精确解法与数值解法中可看到:

(1) 精确解法得到的解表示为一解析函数,它是原问题的唯一解,也是精确解。该结果可以作为一种标准,以此检验其他各种近似解法所得结果的准确程度。

(2) 有限差分法求得的解是一组离散的数据,它是原问题的近似解。用显式格式进行计算时,为保证计算的稳步性,必须满足不等式(2-4-21),也就是,对时间及空间步长的选取有严格的要求。对完全隐式差分格式没有这样的限制。

(3) 数值解的结果可以十分逼近精确解的结果,而求解的途径在计算机的帮助下比精确解要简单,且显式差分方法又比完全隐式差分方法要简单。

本节介绍的数值方法只是初步的,欲作更详尽了解请参阅文献[16,17,20],其中关于稳定性的讨论参阅文献[21]。

## 2.5 平板加热三维导热问题

一维非稳态导热问题是三维非稳态导热问题在一定条件下的一种近似与简化,那里只考虑沿平板厚度方向有热传递,沿长度与宽度方向的热传递完全被忽略。这一节讨论三维空间的温度分布问题。应该说,这更接近实际平板的传热过程。这里讨论的问题仍如图 2-1(a)所示,现通过图 2-24 提供更完整的信息。直角坐标的原点设在平板的左下角, $x$ 轴沿平板宽度( $W$ ), $y$ 轴沿平板长度( $L$ ), $z$ 轴沿平板厚度( $H$ )。平板的上、下表面与温度为  $t_p$  的热板紧密接触,四个垂直侧面与周围环境温度为  $t_e$  的空气进行自然对流热交换。表面传热系数  $h$ 、平板材料密度

$\rho$ 、比热容  $c$  及导热系数  $\lambda$  均为常数。

本节要回答的问题是,在上述已知条件下求平板内的温度分布及其随时间变化,即求  $t(x, y, z, \tau)$ 。

为回答上述问题,先将问题表示成恰当的数学形式,该形式可以是偏微分方程定解问题,也可以是差分方程的定解问题。

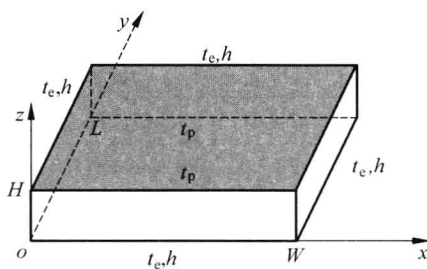


图 2-24 被上、下热板加热的平板

## 2.5.1 偏微分方程形式

三维平板内导热控制方程为

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-5-1)$$

这个方程对不包括边界的平板内部连续区域每一点都成立。平板边界上满足如下边界条件:

$$x = 0 \quad h(t_e - t) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \quad (2-5-2)$$

$$x = W \quad h(t_e - t) = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \quad (2-5-3)$$

$$y = 0 \quad h(t_e - t) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \quad (2-5-4)$$

$$y = L \quad h(t_e - t) = \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \quad (2-5-5)$$

$$z = 0 \quad t = t_p \quad (2-5-6)$$

$$z = H \quad t = t_p \quad (2-5-7)$$

上述边界条件中式(2-5-2)~式(2-5-5)表示平板四个垂直侧面与周围环境的对流热交换。其中等式的含义是,以对流形式从环境到达平板侧面的热流密度等于以导热形式从侧表面传向平板内部的热流密度。同样也可表述为,平板内部以导热的形式到达平板侧面的热流密度等于以对流形式从平板侧面向环境散发的热流密度。上述边界条件中式(2-5-6)与式(2-5-7)则表示上、下表面为给定温度  $t_p$ 。

平板的初始条件为

$$\tau = 0 \quad t = t_0 \quad (2-5-8)$$



上述由式(2-5-1)~式(2-5-8)所构成的偏微分方程定解问题对其进行解析求解是极为困难的,这里不再详述,下面介绍将图 2-24 所示问题表述为差分方程形式。

## 2.5.2 差分方程形式

将本节所讨论的问题表示成差分方程形式的途径如 2.4 节所述有两种。途径一,把式(2-5-1)~式(2-5-8) 偏微分方程定解问题中的各项微商用差商代替,获得差分形式的定解问题。途径二,如本节介绍的控制单元(容积)法,通过把能量守恒原则直接应用到构成平板的每一个单元来建立差分方程定解问题。为此,首先把平板划分成有限个单元,而后,对每个单元逐个建立能量平衡关系式。

### 2.5.2.1 单元划分

如图 2-25 所示,将平板划分成有限个单元,每个单元都是长方体。单元宽为  $\Delta x$ ,若将平板沿宽度  $W$  分成  $I_x$  等份,则  $\Delta x = W/I_x$ 。单元长为  $\Delta y$ ,若将平板沿长度  $L$  分成  $I_y$  等份,则  $\Delta y = L/I_y$ 。沿厚度  $H$  方向分成  $J_z$  个单元,处在平板上、下表面单元的厚度是其他单元厚度的一半,则处于非上、下表面的单元厚度  $\Delta z = H/(J_z - 1)$ ,而上、下表面处单元厚度为  $\Delta z/2$ 。这样,这块平板被划分成  $N_P$  个单

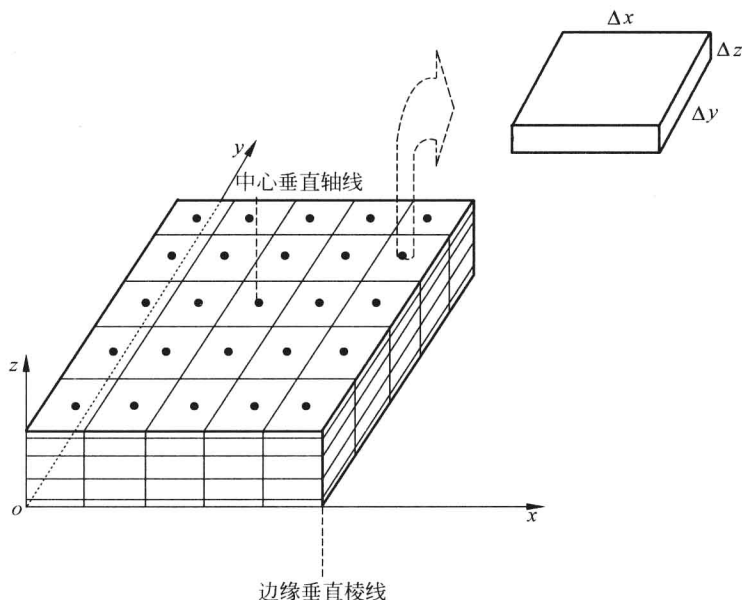


图 2-25 单元划分与节点布置

元,且

$$N_P = I_X \times I_Y \times J_Z \quad (2-5-9)$$

这  $N_P$  个单元中的每一个单元都与一个节点相对应,也即,整个平板有  $N_P$  个节点。除了处在上下表面的单元所对应的节点在单元的上、下表面上之外,其他单元对应的节点都处在单元的中心。

上述单元划分及节点布置的结果使平板上任何一个节点,它与邻近节点的距离都是  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  与  $\Delta z$ 。

### 2.5.2.2 单元分类

上述构成平板的  $N_P$  个单元,根据它们在平板内所处位置,可分成若干组合。

#### 1. 内单元

内单元是指处在平板内部的单元,即长方体单元的 6 个侧面都在平板内部。与 6 个侧面相邻的都是构成平板的单元。内单元的数目  $N_2$  为

$$N_2 = (I_X - 2)(I_Y - 2)(J_Z - 2) \quad (2-5-10)$$

#### 2. 面单元

面单元是指处在平板表面的单元,且单元 6 个侧面中只有一个侧面与环境相邻,其余 5 个侧面与平板其他单元相邻。面单元分两类,一类是处在平板上、下表面的单元,它们的数目  $N_3$  为

$$N_3 = 2(I_X - 2)(I_Y - 2) \quad (2-5-11)$$

另一类是处在平板 4 个侧表面上的单元,它们的数目  $N_4$  为

$$N_4 = 2(I_X + I_Y - 4)(J_Z - 2) \quad (2-5-12)$$

#### 3. 棱单元

每两个表面相交(重叠)处形成一条棱,平板共有 12 条棱。棱单元是指处在棱上的单元,它们中每个单元的 6 个侧面中有 2 个侧面与环境相邻,其余 4 个侧面与平板其他单元相邻。棱单元也分为两类,一类是垂直的棱柱,共 4 条,这 4 条棱柱上单元的数目  $N_5$  为

$$N_5 = 4(J_Z - 2) \quad (2-5-13)$$

另一类是水平的棱,共 8 条,这 8 条棱柱上单元的数目  $N_6$  为

$$N_6 = 4(I_X - 2) + 4(I_Y - 2) \quad (2-5-14)$$

#### 4. 角单元

每三条棱相交处的单元为角单元。对于角单元而言,它们中每个单元的6个侧面中有3个侧面与环境相邻,其余3个侧面与平板其他单元相邻。平板共有8个角单元。

显然,内单元、面单元、棱单元及角单元之和为  $N_P$ ,也即

$$N_P = N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + 8$$

### 2.5.2.3 单元差分方程

#### 1. 内单元

按图 2-26 所示内单元所定义的符号,写出内单元的能量平衡关系式如下

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{t_{i-1,k,j}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta x} \Delta y \Delta z + \lambda \frac{t_{i+1,k,j}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta x} \Delta y \Delta z + \lambda \frac{t_{i,k-1,j}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta y} \Delta x \Delta z \\ & + \lambda \frac{t_{i,k+1,j}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta y} \Delta x \Delta z + \lambda \frac{t_{i,k,j-1}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta z} \Delta x \Delta y + \lambda \frac{t_{i,k,j+1}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta z} \Delta x \Delta y \\ & = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{t_{i,k,j}^{n+1} - t_{i,k,j}^n}{\Delta \tau} \\ & i = 2, 3, \dots, IX - 1; k = 2, 3, \dots, IY - 1; j = 2, 3, \dots, JZ - 1 \end{aligned} \quad (2-5-15)$$

式中及以下表述中, $IX$  等同于  $I_x$ ,  $IY$  等同于  $I_y$ ,  $JZ$  等同于  $J_z$ 。

式(2-5-15)等号左边的6项代表内单元的6个侧面从其邻近6个单元以导热方式在单位时间内传入的热量,等号右边这一项表示该单元在单位时间内热能的增加。式(2-5-15)所包含的内单元的数目即为式(2-5-10)所示的  $N_2$ 。

差分方程(2-5-15)对应于微分方程(2-5-1)。

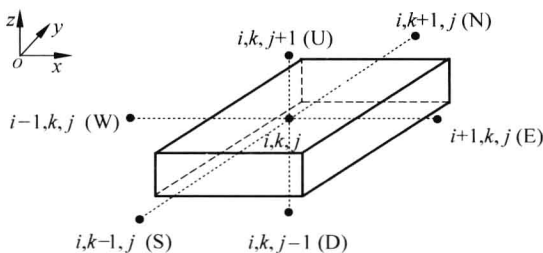


图 2-26 内单元(节点)与它邻近单元(节点)

## 2. 面单元

根据式(2-5-6)与式(2-5-7)所示的边界条件,对于处在上、下表面的单元,则令它们的温度为热板温度  $t_p$ ,即

$$t_{i,k,j}^n = t_p \quad i = 1, 2, \dots, IX; k = 1, 2, \dots, IY; j = 1, JZ \quad (2-5-16)$$

式(2-5-16)所代表的单元的数目不仅包含式(2-5-11)所示的面单元数  $N_3$ ,还包括式(2-5-14)所示的 8 条水平棱上单元数  $N_6$  以及 8 个角单元。

对于处在四个垂直的侧表面的单元,例如,在左( $W, i=1$ )侧表面[对应于边界条件式(2-5-2)],其差分方程为

$$\begin{aligned} & h(t_e - t_{i,k,j}^n) \Delta y \Delta z + \lambda \frac{t_{i+1,k,j}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta x} \Delta y \Delta z + \lambda \frac{t_{i,k-1,j}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta y} \Delta x \Delta z \\ & + \lambda \frac{t_{i,k+1,j}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta y} \Delta x \Delta z + \lambda \frac{t_{i,k,j-1}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta z} \Delta x \Delta y + \lambda \frac{t_{i,k,j+1}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta z} \Delta x \Delta y \\ & = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{t_{i,k,j}^{n+1} - t_{i,k,j}^n}{\Delta \tau} \\ & i = 1; k = 2, 3, \dots, IY - 1; j = 2, 3, \dots, JZ - 1 \end{aligned} \quad (2-5-17)$$

对比式(2-5-15)与式(2-5-17)可发现,式(2-5-15)中等号左边第一项,从左( $W$ )侧邻近单元以导热方式在单位时间内进入本单元的热量在式(2-5-17)中被左侧以对流方式在单位时间内进入本单元的热量所替代。

与式(2-5-17)相仿,写出处在平板其他 3 个侧表面( $i=IX, k=1$  和  $k=IY$ ) [对应于边界条件式(2-5-3)~式(2-5-5)]上单元的差分方程。以式(2-5-17)为代表包含在 4 个侧表面的单元的数目即为式(2-5-12)所示的  $N_4$ 。

与内单元差分方程相比,侧表面差分方程的特点是,在内单元差分方程(2-5-15)等号左边 6 项中的前 4 项中,总有 3 项保持不变,而另一项则改为以对流方式进入单元的热量。至于 4 项中的哪一项需改变,取决于所在侧表面的位置。上述 6 项中的后 2 项与内部单元差分方程相同,表示与上、下单元相邻。

## 3. 棱单元

平板的 8 条水平棱上的单元在本节问题中属上、下表面单元,即给定温度  $t_p$ 。它们已包含在式(2-5-16)之中。

对于 4 条垂直棱上的单元,它们中每个单元的上、下两个侧面与上、下单元相邻,其他 4 个垂直侧表面中总有两个侧表面与环境相邻。这样,在式(2-5-15)等号左边的 6 项中的前 4 项中总有两项为与环境的对流传热,而其余两项以及 6 项中的后两项(表示与上、下单元相邻)保持与式(2-5-15)中相同。至于前 4 项中需改变哪 2 项,要根据棱柱在平板内所处的位置。例如,处在平板左侧表面( $i=1$ )与前

侧表面( $k=1$ )相交的棱柱上,那些棱单元的差分方程为

$$\begin{aligned}
 & h(t_e - t_{i,k,j}^n) \Delta y \Delta z + \lambda \frac{t_{i+1,k,j}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta x} \Delta y \Delta z + h(t_e - t_{i,k,j}^n) \Delta x \Delta z \\
 & + \lambda \frac{t_{i,k+1,j}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta y} \Delta x \Delta z + \lambda \frac{t_{i,k,j-1}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta z} \Delta x \Delta y + \lambda \frac{t_{i,k,j+1}^n - t_{i,k,j}^n}{\Delta z} \Delta x \Delta y \\
 & = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{t_{i,k,j}^{n+1} - t_{i,k,j}^n}{\Delta \tau} \\
 & i = 1; k = 1; j = 2, 3, \dots, JZ - 1
 \end{aligned} \quad (2-5-18)$$

与式(2-5-18)相仿,不难写出处在平板其他3个垂直棱柱上单元的差分方程。以式(2-5-18)为代表包含在4个垂直棱柱的单元的数目即为式(2-5-13)所示的 $N_5$ 。

棱单元差分方程(2-5-18)是在采用途径二,即采用控制容积法建立差分方程过程中出现的。因为这些棱单元有两个边界,处于两种对流环境中(本节中两种对流环境相同)。若采用途径一,即采用以差商代替微商的方法建立差分方程,就不会出现棱单元。这样,式(2-5-18)并不直接对应于边界条件式(2-5-2)~式(2-5-5)中任何一个。

#### 4. 角单元

平板的8个角单元在本问题中属上、下表面单元,即给定温度 $t_p$ 。它们已包含在式(2-5-16)之中。

#### 2.5.2.4 差分方程的统一形式

将上述表示内单元、面单元及棱单元的差分方程写成适用于每个单元(不包括平板上、下表面单元)的统一形式如下:

$$\begin{aligned}
 t_{i,k,j}^{n+1} &= A_W t_{i-1,k,j}^n + A_E t_{i+1,k,j}^n + A_S t_{i,k-1,j}^n + A_N t_{i,k+1,j}^n \\
 &+ A_D t_{i,k,j-1}^n + A_U t_{i,k,j+1}^n + C_A t_{i,k,j}^n + D_A \\
 i &= 1, 2, \dots, IX; k = 1, 2, \dots, IY; j = 2, 3, \dots, JZ - 1
 \end{aligned} \quad (2-5-19)$$

式(2-5-19)的含义是,平板内任一单元( $i, k, j$ )当前时刻( $n+1$ )的温度 $t_{i,k,j}^{n+1}$ 与前一时该单元温度 $t_{i,k,j}^n$ 以及该单元周边单元(包括环境与热板)的温度相关。这种相关性体现在式(2-5-19)中系数 $A_W, A_E, A_S, A_N, A_U, A_D$ 与 $C_A$ 以及自由项 $D_A$ 。其中, $A_W, A_E, A_S$ 及 $A_N$ 表示本单元当前时刻温度 $t_{i,k,j}^{n+1}$ 受左(W)、右(E)、前(S)、后(N)4个单元前一时刻温度影响的程度, $A_U$ 与 $A_D$ 表示 $t_{i,k,j}^{n+1}$ 受上(U)、下(D)两个单元前一时刻温度影响的程度, $C_A$ 表示 $t_{i,k,j}^{n+1}$ 受本单元前一时刻温度以及表面传热系数 $h$ 影响的程度, $D_A$ 则表示受热板温度 $t_p$ 、环境温度 $t_e$ 及表面传热系数 $h$ 影响的程度,即受边界条件影响的程度。当我们知道每个单元所对应的这些系

数后,就不难求得每一单元的温度变化过程,也即平板温度场的变化。这些系数可表示为

$$A_w = A_E = \frac{\lambda \Delta \tau}{\Delta x^2 \rho c} \quad (2-5-20)$$

当  $i=1, A_w=0$ ; 当  $i=IX, A_E=0$

$$A_s = A_N = \frac{\lambda \Delta \tau}{\Delta y^2 \rho c} \quad (2-5-21)$$

当  $k=1, A_s=0$ ; 当  $k=IY, A_N=0$

$$A_D = A_U = \frac{\lambda \Delta \tau}{\Delta z^2 \rho c} \quad (2-5-22)$$

当  $j=1, A_D=0$ ; 当  $j=JZ, A_U=0$

$$C_A = -A_w - A_E - A_s - A_N - A_D - A_U + 1 \quad (2-5-23)$$

当  $i=1$

$$C_A = C_A + A_w - \frac{h \Delta \tau}{\Delta x \rho c}$$

当  $i=IX$

$$C_A = C_A + A_E - \frac{h \Delta \tau}{\Delta x \rho c}$$

当  $k=1$

$$C_A = C_A + A_s - \frac{h \Delta \tau}{\Delta y \rho c}$$

当  $k=IY$

$$C_A = C_A + A_N - \frac{h \Delta \tau}{\Delta y \rho c}$$

$$D_A = 0 \quad (2-5-24)$$

当  $i=1$  或  $i=IX$

$$D_A = D_A + \frac{ht_e}{\Delta x} \frac{\Delta \tau}{\rho c}$$

当  $k=1$  或  $k=IY$

$$D_A = D_A + \frac{ht_e}{\Delta y} \frac{\Delta \tau}{\rho c}$$

当  $j=2$  或  $j=JZ-1$

$$D_A = D_A + \frac{\lambda t_p}{\Delta z^2} \frac{\Delta \tau}{\rho c}$$

提醒读者注意,上述公式中出现诸如

$$C_A = C_A + A_w - \frac{h \Delta \tau}{\Delta x \rho c} \quad (2-5-25)$$

这样的公式。这是进行数值计算时计算机程序语言中常出现的,表示在不同条件下,关于  $C_A$  的计算公式需修正。式(2-5-25)这种表示在传统代数公式中是不允许出现的。

式(2-5-19)是显式差分方程,它的求解比较简单和容易。如果改为隐式,书写形式近乎相同,求解过程就会复杂和困难些。

### 2.5.3 算例

本算例的已知条件除了与2.3节和2.4节提供的有关一维非稳态导热问题相同之外,还必须提供与三维非稳态导热问题相联系的条件,例如,平板的宽度与长度,也即板的幅面。本算例中选取了大、小两种幅面。大幅面是  $1.22 \text{ m} \times 2.44 \text{ m}$ , 即  $W=1.22 \text{ m}$ ,  $L=2.44 \text{ m}$ ,  $\Delta x=W/10=0.122 \text{ m}$ ,  $\Delta y=L/10=0.244 \text{ m}$ ; 小幅面是  $0.244 \text{ m} \times 0.488 \text{ m}$ , 即  $W=0.244 \text{ m}$ ,  $L=0.488 \text{ m}$ ,  $\Delta x=W/10=0.0244 \text{ m}$ ,  $\Delta y=L/10=0.0488 \text{ m}$ 。此外,必须给出平板四个垂直侧面的边界条件,本算例设定环境温度  $t_e$  等于平板初始温度  $t_0$ , 即  $t_e=t_0$ , 平板侧表面与环境空气之间为自然对流,取自然对流表面传热系数  $h=5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。

本算例给出的已知参数参照文献[18]木材人造板及其加工工艺的条件。因此,本算例也可理解为在热压机上一块绝干的木材人造板板材的加热过程。

本算例选用显式差分方程,保证计算稳定性的条件是,时间步长的选取必须满足如下不等式:

$$\Delta \tau \leq \frac{1}{a \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} + \frac{h}{\lambda \Delta x} + \frac{h}{\lambda \Delta y} \right)} \quad (2-5-26)$$

式中,  $\Delta z=H/10=1.2 \text{ mm}$ ;  $a=0.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。将式(2-5-26)与式(2-4-21)相比可见,式(2-5-26)对  $\Delta \tau$  的选值似乎更苛刻了,但针对本算例,将相应数据代入

式(2-5-26),对大幅面平板, $\Delta\tau$  的临界值是

$$\Delta\tau = \frac{1}{0.15 \times 10^{-6} \times (69 + 17 + 1.38 \times 10^6 + 417 + 205)} \approx 4.8 \text{ (s)}$$

对小幅面平板, $\Delta\tau$  的临界值是

$$\Delta\tau = \frac{1}{0.15 \times 10^{-6} \times (1680 + 420 + 1.38 \times 10^6 + 2049 + 1024)} \approx 4.7 \text{ (s)}$$

本算例中取  $\Delta\tau=1.0 \text{ s}$  足以保证计算稳定。从上述关于  $\Delta\tau$  临界值的计算中可以看到,在本问题中,影响  $\Delta\tau$  的临界值的主要因素是含  $\Delta z$  的那一项,由其他因素组成的各项其影响都是微小的。

大幅面与小幅面计算结果分别列于表 2-4 与表 2-5。

表 2-4 大幅面平板边缘垂直棱线上温度分布随时间变化

$\tau/\text{s}$	$z/H$					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	20.00	20.00	20.00	20.00	38.44	200
2	20.00	20.00	20.00	21.89	53.10	200
4	20.00	20.02	20.66	28.51	74.67	200
8	20.13	20.70	25.01	44.37	100.54	200
16	22.88	26.12	39.06	69.91	125.29	200
31	38.21	44.48	63.99	97.79	144.78	200
62	78.40	84.23	101.24	127.97	161.99	200
125	134.83	138.01	147.22	161.59	179.76	200
250	180.30	181.25	184.00	188.32	193.81	200
500	196.63	196.78	197.21	197.92	198.86	200

表 2-5 小幅面平板边缘垂直棱线上温度分布随时间变化

$\tau/\text{s}$	$z/H$					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	20.00	20.00	20.00	20.00	38.44	200
2	20.00	20.00	20.00	21.89	53.08	200



续表

$\tau/s$	$z/H$					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
4	20.00	20.02	20.65	28.50	74.60	200
8	20.13	20.70	24.99	44.29	100.34	200
16	22.86	26.07	38.92	69.59	124.85	200
31	37.91	44.09	63.39	96.95	143.97	200
61	76.65	82.41	99.30	126.05	160.57	200
125	129.21	132.50	142.12	157.37	177.12	200
250	169.00	170.34	174.31	180.76	189.42	200
500	181.90	182.61	184.76	188.34	193.41	200

1. 大幅面平板

从计算结果中我们看到,对大幅面平板而言,沿中心垂直轴线(见图 2-25)的温度分布随时间的变化与如表 2-2(或图 2-22)所示的一维平板的显式有限差分法求得的结果几乎完全相同,这里就不再以图线或数据表格形式列出。表 2-4 列出的是平板边缘垂直棱线(见图 2-25)上温度分布随时间的变化。将表 2-4 的数据与表 2-2 的数据作对比,它们之间的差别也不大(参见用黑体标出的两行数据)。这一事实告诉我们,当一块平板在上、下表面接受加热而平板厚度  $H$  比其宽度  $W$  小很多时,在平板被加热相当长一段时间内,可以用一维平板代替三维平板,两者算得的温度分布相差无几,平板内导热只发生在垂直的厚度方向,水平方向的导热可以忽略不计。为了加深这一认识,这里就平板内垂直方向与水平方向的热流密度作进一步分析。为此,将计算结果列于表 2-6。

表 2-6 垂直方向热流密度  $q_z$  与水平方向热流密度  $q_x$

$\tau/s$	大幅面平板			小幅面平板		
	上、下表面 $q_z/(kW/m^2)$	侧表面 $q_x/(W/m^2)$	$q_z/q_x$	上、下表面 $q_z/(kW/m^2)$	侧表面 $q_x(W/m^2)$	$q_z/q_x$
1	13.464	0.000	$>100\,000$	13.464	0.000	$>100\,000$
2	12.242	0.000	$>100\,000$	12.242	0.005	$>100\,000$
4	10.444	0.001	$>100\,000$	10.444	0.027	$>100\,000$

续表

$\tau/s$	大幅面平板			小幅面平板		
	上、下表面 $q_z/(\text{kW}/\text{m}^2)$	侧表面 $q_x/(\text{W}/\text{m}^2)$	$q_z/q_x$	上、下表面 $q_z/(\text{kW}/\text{m}^2)$	侧表面 $q_x(\text{W}/\text{m}^2)$	$q_z/q_x$
8	8.287	0.004	$>100\,000$	8.288	0.101	$>100\,000$
16	6.223	0.013	$>100\,000$	6.226	0.330	$>10\,000$
31	4.596	0.038	$>100\,000$	4.602	0.950	$>1000$
62	3.156	0.111	$>10\,000$	3.167	2.735	$>1000$
125	1.666	0.291	$>1000$	1.687	7.068	$>100$
250	0.48	0.571	$>100$	0.515	13.609	$>10$
500	0.049	0.761	$>10$	0.094	17.794	$>4$

我们知道,在已知温度分布条件下不难求得垂直方向与水平方向热流密度。为此,用如下式(2-5-27)与式(2-5-28)可以分别计算垂直方向由热板通过上、下表面传入平板的热流密度  $q_z$  与由平板内部水平方向(宽度方向)传给侧表面的热流密度  $q_x$ 。

$$q_z = \frac{\sum_{i=1}^{IX} \sum_{k=1}^{IY} \lambda(t_p - t_{i,k,JZ-1})/\Delta z}{L \times W}$$

(2-5-27)

与

$$q_x = \frac{\sum_{j=2}^{JZ-1} \sum_{k=1}^{IY} \lambda(t_{IX-1,k,j} - t_{IX,k,j})/\Delta x}{L \times (H - \Delta z)}$$

(2-5-28)

表 2-6 中第 2 列是按式(2-5-27)算得的  $q_z$  的结果,它与图 2-23 所示(对应于  $z/H=0.5$  的曲线)的结果十分接近,从加热过程开始后迅速下降。表 2-6 中第 3 列是按式(2-5-28)算得的  $q_x$  的结果,它从加热开始迅速上升。表中第 4 列给出了  $q_z/q_x$  随时间的变化, $q_z$  始终远大于  $q_x$ 。这就印证了平板内导热主要发生在垂直的厚度方向而水平方向的导热可以忽略不计这一认识。

2. 小幅面平板

对本算例所列的小幅面平板而言,沿中心垂直轴线(见图 2-25)上温度分布随时间的变化仍然与一维平板的显式有限差分解得到的由表 2-2(或图 2-22)所示的

结果几乎完全相同,这里同样不再以图线或数据表格形式列出。表 2-5 列出的是平板边缘垂直棱线(见图 2-25)上温度分布随时间的变化。将表 2-5 的数据与表 2-2 的数据作对比,它们之间的差别就比较明显(参见用黑体标出的两行数据),也就是,中心垂直轴线上的温度与边缘垂直棱线上的温度有所差别。这说明,以一维平板替代三维平板用来计算中心垂直轴线上的温度分布仍然是可行的,而用来计算边缘垂直棱线上的温度分布,在苛刻的条件下就不行了。表 2-6 中第 5、6 与 7 列给出了关于小幅面平板的  $q_z$ 、 $q_x$  与  $q_z/q_x$ 。从表中数据看到,小幅面平板的  $q_z$  与大幅面平板的  $q_z$  在相当长一段加热过程中仍然是相同的,而  $q_x$  从加热过程开始两者(大幅面与小幅面)就有明显差别。小幅面平板的  $q_x$  大于大幅面平板的  $q_x$ 。但就  $q_z/q_x$  而言, $q_z$  仍明显地大于  $q_x$ 。也就是说,对本算例的小幅面平板而言,在一般意义上讲,仍然可以用一维平板近似三维平板,这是因为小幅面平板的宽度  $W$  仍远比厚度  $H$  大得多( $W/H > 20$ )。

## 习 题

- 2-1 如图 2-27 所示,  $t_1$  与  $t_2$  分别为同心圆环内、外圆周上的温度,且  $t_1 > t_2$ ,试画出过  $a$  点的等温线、温度梯度及热流密度向量。说明  $a$ 、 $b$  两点中哪一点的温度梯度更大。
- 2-2 试分析导热积分方程式(2-2-6)与微分方程式(2-2-11)的共同性与差异性。
- 2-3 密度、比热容、导热系数及热扩散率都是固体材料的热物理性质,试问哪些性质对稳态导热问题(稳态温度场)有直接影响,哪些性质对非稳态导热问题(非稳态温度场)有直接影响,并说明理由。
- 2-4 导热正问题与导热反问题基本区别是什么?请各举一例,并讨论定解条件。
- 2-5 式(2-2-32)为无内热源常物性稳态导热微分方程,其中不含有任何物性量,是否由此可得出结论:在无内热源常物性稳态导热过程中,温度分布与物性无关。
- 2-6 为什么说“在温度场确定之后,热流密度场就唯一地被确定下来,而在确定热流密度场后,温度场并不能唯一地被确定”?试从物理与数学两方面予以说明。
- 2-7 试问在第一类、第二类与第三类边界条件中有几种组合方式可使厚度为

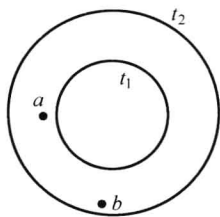


图 2-27

$H$  的平板内一维稳态常物性导热方程具有唯一解。(例如,最简单的一组是:  $x=0, t=t_1; x=H, t=t_2$ )

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad 0 < x < H$$

- 2-8 本章图 2-10 所示的一维导热问题的温度场是  $t(z, \tau)$ , 是否可通过改变边界条件, 使其温度场表现为  $t(x, \tau)$ , 即热流只沿着平板的宽度方向传递? 请具体说明怎样改变其边界条件。
- 2-9 在用分离变量法求解式(2-3-1)~式(2-3-4)偏微分方程过程中, 在讨论式(2-3-11)为常数时, 其结论是常数必定是负实数, 由此得到式(2-3-12)。请你复习一下高等数学中有关常微分方程的性质, 搞清楚为什么常数必须是负实数。
- 2-10 厚度分别为  $H_1$  与  $H_2$ , 初始温度分别为  $t_{10}$  与  $t_{20}$  两块平板突然紧密接触, 如图 2-28 所示。若传热过程只发生在两块平板之间, 忽略平板与环境的传热。试写出寻求两块平板温度变化的控制方程及定解条件。在此基础上, 写出求解温度场的差分方程。

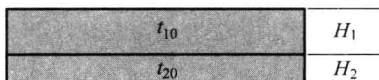


图 2-28

- 2-11 针对本章图 2-15 与图 2-18, 用推导差分方程的两种途径, 分别写出如下第三类边界条件的差分方程。

$$z = H \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial z} = h(t_e - t)$$

- 2-12 请比较边界条件式(2-5-2)与式(2-5-3), 两者为什么相差一个负号?
- 2-13 试分析用有限差分法求解微分方程定解问题包含哪些方面误差。
- 2-14 试推导关于为保证计算稳定的时间步长  $\Delta \tau$  的不等式(2-5-26)。

## 参 考 文 献

- [1] 沈维道, 童均耕主编. 工程热力学. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [2] 奥齐西克 M N. 热传导. 俞昌铭主译. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [3] INCROPERA F P. DEWITT D P. Fundamentals of heat and mass transfer[M]. 5th ed.

- New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [4] 杨世铭, 陶文铨. 传热学, 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [5] 王补宣. 工程传热传质学: 上册. 北京: 科学出版社, 1982.
- [6] 波林 B E, 普劳斯尼茨 J M, 奥康乃尔 J P. 气液物性估算手册. 第5版. 赵红等. 北京: 化学工业出版社, 2006.
- [7] 马庆芳, 方荣生. 实用热物理性质手册. 北京: 中国农业机械出版社, 1976.
- [8] 张家荣, 赵廷元. 工程常用物质的热物理性质手册. 北京: 新时代出版社, 1987.
- [9] TOULOUKIAN Y S. Thermophysical properties of matter[M]. New York: IFI/Plenum, 1985.
- [10] LIDE D R, KEHIAIAN H V. CRC handbook of thermophysical and thermochemical data [M]. CRC Press, 1994.
- [11] 叶其孝, 沈永欢. 实用数学手册[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [12] 赵镇南. 传热学. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [13] 罗森诺 W M. 等. 传热学基础手册. 齐欣译. 北京: 科学出版社, 1992.
- [14] BECK J V, BLACKWELL B. Inverse heat conduction: ill-posed problem[M]. New York: Wiley C. 1985.
- [15] 俞昌铭. 计算热物性参数的导热反问题. 工程热物理学报, 1982, 3(4): 372-378.
- [16] 俞昌铭. 热传导及其数值分析. 北京: 清华大学出版社, 1982.
- [17] 孔祥谦. 有限单元法在传热中的应用. 第3版. 北京: 科学出版社, 1998.
- [18] 华毓坤. 人造板工艺学. 北京: 中国林业出版社, 2006.
- [19] 徐士良. FORTRAN 常用算法程序集. 北京: 清华大学出版社, 1992.
- [20] 陶文铨. 数值传热学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
- [21] 俞昌铭. 边界条件对一维非稳态导热差分格式稳定性的影响[M]//陶文铨, 林汉涛, 李长发, 等. 传热学的研究与进展. 北京: 高等教育出版社, 1995: 271-278.

## 第 3 章

## Chapter

# 静止水加热及表面蒸发

第 2 章讨论了密实固体材料在受热条件下的响应,重点是材料内部的温度分布及相应地热流密度分布随时间变化。这一章将讨论静止的液相水在外部热空气对流加热条件下的响应,即水的温度变化及液相水表面蒸发(或凝结)过程,图 3-1 为该过程示意图。

大部分多孔材料不同程度含有水分,在被加热时,总是伴有水分迁移。这种水分迁移不仅存在于材料内部还存在于材料表面,如建材、木材、谷物等材(物)料的干燥过程。干燥前的材(物)料含有大量的水,其中水的质量甚至超过固相骨架的质量。这样,一块湿材料犹如一

块多孔的固体浸泡在水中,它在干燥过程的前期就像图 3-1 所示器皿中的一池水所经历的受热及表面蒸发(或凝结)过程。即便当材料中的含水量逐渐减少,材料表面水的蒸发过程仍然是影响材(物)料干燥的重要因素。

本章讨论的问题可表述为:已知器皿内水的初始温度  $t_0$  与质量  $m_0$ ,当时间  $\tau > 0$ ,处在一定外部条件下,求器皿内水的温度  $t$  与质量  $m$  的变化,即求  $t(z, \tau)$  与  $m(\tau)$ 。一定外部条件是指环境空气的温度( $t_e$ )、空气流过水表面的速度( $u_e$ )及环境湿空气湿度。此外,器皿由绝热材料制成,器皿内的水不可能通过器皿壁与外部环境进行热交换。

为了回答上述问题,先要认识这一问题的物理过程,也即建立物理模型。在此基础上,用数学的方法来描述这一物理过程,也即建立数学模型。具体地说,就是建立器皿内一池水在加热条件下质量与能量守恒的微分方程定解问题。而后,求解该定解问题,以数学问题的解作为对上述问题的回答。

建立物理模型,从认识液相水所处环境的空气湿度以及水表面与环境空气流间的传热传质现象开始。

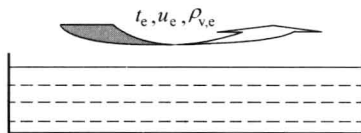


图 3-1 流动的热空气对一池静止水的加热

### 3.1 环境空气的湿度

环境空气的湿度是影响图 3-1 所示池内液相水的温度与水面蒸发的重要因素之一。应该说,本节讨论的环境空气不仅指如图 3-1 所示的湿空气大气环境,还包括干燥炉窑内作为干燥介质的湿空气炉内环境,还包括存在于多孔材料孔隙内的湿空气环境。正由于湿空气环境总是与多孔材料传热传质过程相伴存在,因此,正确认识与定量描述湿空气的状态显得十分重要。

对于湿空气状态可从两个方面去认识。一是从工程热力学<sup>[1-3]</sup>中关于湿空气的基本概念出发,给出物理定义及数学表示;另一方面是从实际应用出发,测量空气的干球温度与湿球温度,再把它与空气湿度联系起来。以下分别予以阐述。

#### 3.1.1 湿空气

湿空气是指含有水蒸气的空气,完全不含水蒸气的空气为干空气。大气中的空气或多或少都含有水蒸气,所以人们通常遇到的空气都是湿空气,只是由于其中水蒸气的含量不大,有时就按干空气计算。但是对诸如含水多孔材料干燥等那些与湿空气中水蒸气含量有密切关系的过程,就必须按湿空气来考虑,以便认识湿空气的潮湿程度对干燥过程的影响。

##### 3.1.1.1 湿空气和干空气

地球上的干空气随时间、地理位置、海拔高度、环境污染等因素而产生微小的变化,为便于计算,工程上将干空气标准化。标准化干空气见表 3-1<sup>[1]</sup>。表中列出了组成干空气各组分的化学名称、相对分子质量及摩尔分数(体积分数)。由于干空气的组成通常是固定不变的,故可当作一种“单一气体”,按理想气体进行计算。

表 3-1 标准化干空气的组成

成分	相对分子质量	摩尔分数	成分	相对分子质量	摩尔分数
O <sub>2</sub>	32.000	0.2095	Ar	39.944	0.0093
N <sub>2</sub>	28.016	0.7809	CO <sub>2</sub>	44.01	0.0003

对湿空气而言,一般情况下,其中干空气的成分比较稳定,而水蒸气成分则有较大不同,尤其是作为干燥介质环境中的水蒸气,其含量随干燥过程而发生变化,

且变化量比较大。但总体而言,由于湿空气中水蒸气含量还是比较少,水蒸气分压通常较低,干燥介质的温度又较高,水蒸气处于过热状态。因此,湿空气中水蒸气也可按理想气体进行计算。这样,湿空气是理想气体混合物,理想气体遵循的规律及理想气体混合物的计算公式都可应用。

根据道尔顿分压定律,湿空气压力  $p$  等于干空气压力  $p_a$  与水蒸气压力  $p_v$  之和,即

$$p = p_a + p_v \quad (3-1-1)$$

如果对湿空气没有特意进行压缩与抽真空,湿空气的压力一般为当地的大气压力。

在湿空气分析计算中一般包含如下两点假定<sup>[2]</sup>: (1)湿空气中水蒸气凝聚成的液相水不含有空气;(2)空气的存在不影响水蒸气与凝聚的液相水的相平衡,相平衡温度为水蒸气分压所对应的饱和温度。下面以图 3-2 所示为例说明这一假定。

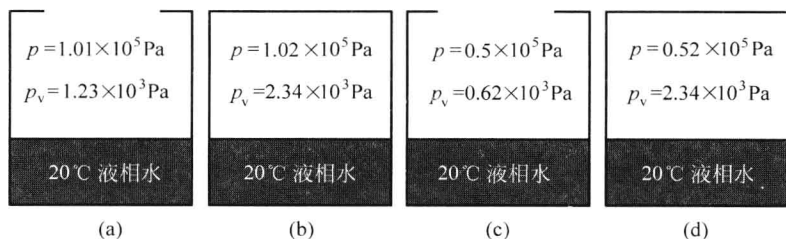


图 3-2 湿空气中干空气对相平衡的影响

(a) 1 个大气压环境下敞开容器; (b) 1 个大气压封闭容器;  
(c) 0.5 个大气压环境下敞开容器; (d) 0.5 个大气压的封闭容器

图 3-2(a)表示 20°C 的水处在水蒸气分压为  $p_v = 1.23 \times 10^3 \text{ Pa}$  的大气环境 ( $p = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ) 下。若将容器开口处封死,如图 3-2(b),封闭容器内的水蒸气压力将达到温度 20°C 所对应的饱和水蒸气压力  $p_v = 2.34 \times 10^3 \text{ Pa}$ 。如果对  $p = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  湿空气进行抽气,达到一定真空状态,如  $p = 0.5 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,即环境压力下降一半,相应地,湿空气中水蒸气分压也下降一半,达  $p_v = 0.62 \times 10^3 \text{ Pa}$ ,如图 3-2(c)。如果将容器开口处封死,如图 3-2(d),封闭容器内的水蒸气压力同样达到温度 20°C 所对应的饱和水蒸气压力  $p_v = 2.34 \times 10^3 \text{ Pa}$ 。

如果对图 3-2(c)所示的开口容器继续抽真空,直至环境压力  $p = 2.34 \times 10^3 \text{ Pa}$ ,容器内 20°C 的水将沸腾。



### 3.1.1.2 未饱和空气和饱和空气

湿空气中水蒸气,由于其含量不同(表现为水蒸气密度大小和水蒸气分压高低)以及温度不同,或者处于过热状态,或者处于饱和状态,因而湿空气有未饱和与饱和之分。图 3-3 所示的两条光滑曲线,是湿空气温度  $t$  与对应于该温度下饱和水蒸气密度  $\rho_{sv}$ (实线)和饱和水蒸气压力  $p_{sv}$ (虚线)的关系。当温度为  $t$  的湿空气中水蒸气密度  $\rho_v$  低于对应的饱和水蒸气密度  $\rho_{sv}$  时,湿空气处于未饱和状态,如图 3-3 中点  $a$  所示。如果湿空气保持温度不变,而水蒸气含量增加,即水蒸气密度增加, $a$  点将沿垂直线向上移动。当  $a$  点移动到  $b$  点时,湿空气中水蒸气含量达到饱和状态,则为饱和空气。饱和空气吸收水蒸气的能力已经达到极限,若再向它加入水蒸气,将凝结为水滴从中析出,这时水蒸气密度与水蒸气分压是该温度下可能达到的最大值。

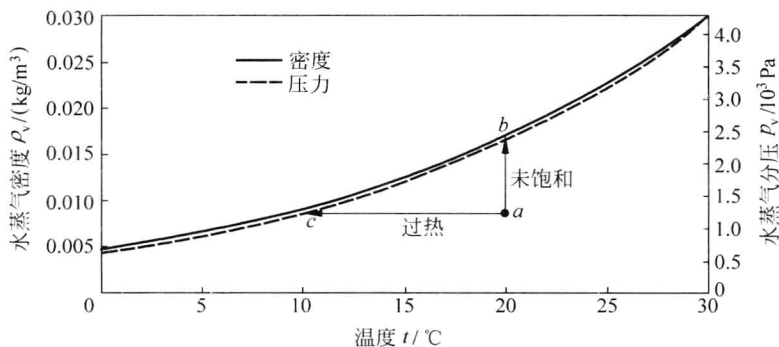


图 3-3 湿空气中的水蒸气状态

如果湿空气保持水蒸气含量不变,而温度下降, $a$  点将沿水平线向左移动。当  $a$  点移动到  $c$  点时,水蒸气达到对应于  $c$  点温度的饱和状态。此状态下的湿空气为饱和空气。

总之,处于  $a$  点状态的湿空气,按其中水蒸气密度或水蒸气分压与  $b$  点相比, $a$  点处于未饱和状态;按其温度与  $c$  点相比, $a$  点处于过热状态。这里,“未饱和”与“过热”都是对湿空气状态的一种描述。

### 3.1.2 湿空气状态参数

这一节介绍表示空气湿度(也即湿空气状态)的几个参数以及它们之间的相互联系。

### 3.1.2.1 绝对湿度

绝对湿度(absolute humidity)的定义是单位体积湿空气中所含水蒸气的质量,由于湿空气中水蒸气具有与湿空气同样的体积,则绝对湿度即为湿空气中水蒸气密度  $\rho_v$ ,表示为

$$\rho_v = \frac{m_v}{V} \quad (3-1-2)$$

式中, $V$  是湿空气占有的体积( $\text{m}^3$ ); $m_v$  是该体积内水蒸气质量( $\text{kg}$ ); $\rho_v$  常用单位是  $\text{kg}/\text{m}^3$ 。需提醒注意的是,这里的水蒸气密度是混合气体中的密度,有别于单一物质所占空间的密度的定义。例如,水的密度为  $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,是指全部空间被水所充满。为防止混淆,这里的水蒸气密度应为水蒸气容积密度。但习惯上对混合气体密度并不刻意地区分密度与容积密度这两个名称,但它们在物理含义上是不同的,在作计算时更要谨慎处理。

尽管在传热传质学关于质量传输的计算中,常采用绝对湿度  $\rho_v$  来描述空气的湿度,但绝对湿度并不能完全说明湿空气的潮湿程度和吸湿能力。因为,同样绝对湿度( $\rho_v = 0.009 \text{ kg}/\text{m}^3$ )的湿空气,如果温度较高(比如  $20^\circ\text{C}$ ,如图 3-3 中  $a$  点),则该温度所对应的饱和水蒸气压力及饱和水蒸气密度都较高( $\rho_{sv} = 0.017 \text{ kg}/\text{m}^3$ ),湿空气处于较大的未饱和状态,空气还比较干燥,还具有吸湿能力(冬天在有暖气的房间里感到干燥;把新鲜蔬菜放在  $20^\circ\text{C}$  环境中容易失去水分);如果温度较低(比如  $10^\circ\text{C}$ ,如图 3-3 中  $c$  点),则该温度所对应的饱和水蒸气压力及饱和水蒸气密度都较低( $\rho_{sv} = 0.009 \text{ kg}/\text{m}^3$ ),空气潮湿,吸湿能力消失;如果温度再低,就会有水珠凝结出来(冬天在没有暖气的房间里感到阴冷潮湿;把新鲜蔬菜放在温度设定在  $5\sim 8^\circ\text{C}$  的冰箱冷藏室以防腐保鲜,防止水分蒸发)。总之,绝对湿度不能完全说明湿空气的潮湿程度和吸湿能力,为此,引入相对湿度(relative humidity)的概念。

### 3.1.2.2 相对湿度

顾名思义,相对湿度是反映湿空气的相对潮湿程度,作为相对湿度的值应该在  $[0,1]$  范围内,相对湿度为 0 对应着干空气,相对湿度为 1 对应着饱和空气。关于相对湿度的定义在不同版本的工程热力学教材中有所不同,大体有三种表述。表述一<sup>[3]</sup>,相对湿度是未饱和湿空气中水蒸气的摩尔数  $n_v$  与相同温度、相同总压下饱和空气中水蒸气摩尔数  $n_{sv}$  之比;表述二<sup>[1]</sup>,相对湿度是湿空气中水蒸气分压  $p_v$  与相同温度、相同总压下饱和空气中水蒸气压力  $p_{sv}$  之比;表述三<sup>[2]</sup>,相对湿度是湿空气中绝对湿度  $\rho_v$  与相同温度下可能达到的最大绝对湿度(即饱和空气的绝对湿

度) $\rho_{sv}$ 之比。若将相对湿度记作 $\varphi$ ,则上述三种表述分别为

$$\varphi = \frac{n_v}{n_{sv}} \quad (a) \quad \varphi = \frac{p_v}{p_{sv}} \quad (b) \quad \varphi = \frac{\rho_v}{\rho_{sv}} \quad (c) \quad (3-1-3)$$

式(a)经推导可得到式(b)。应该说,表述二是相对湿度传统表述方式,广泛地被采用。问题是,某些工业领域内,作为干燥介质的湿空气被加热到相当高的温度(如 $200^\circ\text{C}$ ),相应地饱和水蒸气压力 $p_{sv}$ (1.55 MPa)大于总压力(大气环境压力0.101 MPa), $\varphi$ 的值很小,可能变化的范围也很小,失去了它在 $[0,1]$ 范围内变化的可能。表述三的定义克服了上述不足,且式(3-1-3)可统一改写为

$$\varphi = \frac{p_v}{p_{sv}} \approx \frac{\rho_v}{\rho_{sv}} \quad (p_{sv} \leq p) \quad (3-1-4)$$

和

$$\varphi = \frac{p_v}{p} \quad (p_{sv} > p) \quad (3-1-5)$$

式(3-1-4)中近似等号,即相对压力近似等于相对密度,由图 3-3 对此作了直观显示。

### 3.1.2.3 水蒸气分压

关于式(3-1-4)中水蒸气分压 $p_v$ 的计算,如前所述,湿空气中水蒸气可视为理想气体,满足理想气体状态方程,则水蒸气分压 $p_v$ 为

$$p_v = \frac{\rho_v RT}{M_v} \quad (3-1-6)$$

式中, $T$ 是湿空气温度(K); $R$ 是摩尔气体常数 $[8.315 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})]$ ;  $M_v$ 是水蒸气摩尔质量( $18.02 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ )。式(3-1-6)是水蒸气分压 $p_v$ 与水蒸气密度 $\rho_v$ 的关联式。在已知水蒸气密度 $\rho_v$ 之后,当湿空气温度 $t$ 已确定,即可通过式(3-1-6)求得水蒸气分压 $p_v$ 。所以,水蒸气分压 $p_v$ 也是表示湿空气状态的参数。

### 3.1.2.4 露点

未饱和湿空气在保持水蒸气分压 $p_v$ 不变而温度不断下降过程,即如图 3-3 中由 $a$ 点向 $c$ 点移动,当移动到 $c$ 点,湿空气达到饱和状态,继续冷却就会结露。点 $c$ 的温度即为对应于水蒸气分压 $p_v$ 的饱和温度,称为露点(dewpoint),记作 $t_d$ 。显然, $t_d = f(p_v)$ ,若已知水蒸气分压 $p_v$ ,则可通过“饱和水与饱和水蒸气热力性质表”查得饱和温度,也即露点。相反,若已知露点 $t_d$ ,即可求得水蒸气分压 $p_v$ 。

在实际应用中,常常通过实测露点  $t_d$  来求水蒸气分压  $p_v$ ,进而求得湿空气的相对湿度。

### 3.1.2.5 含湿量

很多实际工程,如干燥、吸湿等过程,常常以湿空气为工作介质,干空气作为载热体或载湿体,它的质量或质量流是恒定的,发生变化的只是湿空气中水蒸气的质量。因此,湿空气的一些参数,如湿空气中含湿量(moisture contents),以单位质量干空气为基准,以便工程计算。

含湿量(又称比湿度, humidity ratio)的定义是,单位干空气质量所包含的水蒸气质量,记作  $\omega$ ,表示为

$$\omega = \frac{m_v}{m_a} \quad (3-1-7)$$

式中,  $m_a$  与  $m_v$  为与水蒸气共处一个体系的干空气质量与水蒸气质量。由于水蒸气与干空气占据共同的体积,因此,式(3-1-7)又可写为

$$\omega = \frac{\rho_v}{\rho_a} \quad (3-1-8)$$

干空气与水蒸气都为理想气体,将理想气体状态方程代入  $\rho_v$  与  $\rho_a$ ,式(3-1-8)成为

$$\omega = \frac{p_v}{p_a} \frac{M_v}{M_a} \quad (3-1-9)$$

式(3-1-9)中  $M_a$  是干空气的摩尔质量,  $28.97 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ 。

将式(3-1-1)代入式(3-1-9),可得

$$\omega = \frac{p_v}{p - p_v} \frac{M_v}{M_a} \quad (3-1-10)$$

将  $M_a$  与  $M_v$  的值代入式(3-1-10),则

$$\omega = \frac{0.622 p_v}{p - p_v} \quad (3-1-11)$$

式(3-1-11)就是含湿量  $\omega$  与水蒸气分压  $p_v$  的关联式,若已知  $p_v$ ,即可由式(3-1-11)求得  $\omega$ 。

含湿量  $\omega$  是一个无量纲物理量,常用  $\text{kg/kg}$  表示。若将湿空气中的含湿量与含水多孔材料中的含水率(干基含水率)进行对比,不难发现,两者在概念上是完全相同的。

综上所述,为了描述湿空气状态,在已知两个独立参数,湿空气温度  $t$  与压力  $p$  之外,还需补充一个独立参数,这个参数可以是上述表示湿度的 5 个参数  $\rho_v, \varphi, p_v, t_d, \omega$  中的任意一个。因为这 5 个参数彼此不是独立的,相互之间有着内在联系,如图 3-4 所示。图中,湿空气总压  $p$  与温度  $t$  作为理想气体状态的两个独立参数,这里用虚线框表示,而  $p_{sv}$  和  $\rho_{sv}$  则由“饱和水与饱和水蒸气热力性质表”查得,它们不是独立参数。其余 5 个实线框内的参数都是表示湿空气状态的参数,它们相互之间通过式(3-1-4)、式(3-1-11)、理想气体状态方程及“饱和水与饱和水蒸气热力性质表”联系着。

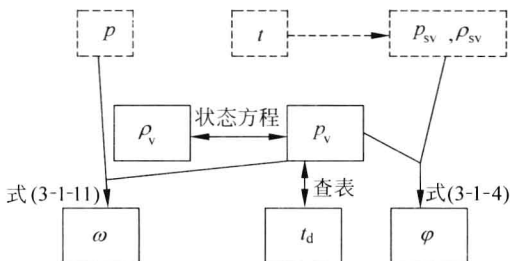


图 3-4  $\rho_v, p_v, t_d, \varphi$  及  $\omega$  间的关系

熟悉上述 5 个参数内在联系,便于运用计算机软件进行工程计算,可以不依赖于曾广泛采用的各种曲线图。为此,本书不再介绍诸如湿空气含湿图等曲线图。

现举例说明表示空气湿度这 5 个参数的内在联系。若已知湿空气压力  $p = 10^5 \text{ Pa}$ , 湿空气温度  $t = 200^\circ\text{C}$ , 水蒸气分压  $p_v = 0.3 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 求水蒸气密度  $\rho_v$ 、露点  $t_d$ 、含湿量  $\omega$  及相对湿度  $\varphi$ 。

### 1. 求露点 $t_d$

根据  $p_v = 0.3 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 以它为饱和水蒸气压力查“饱和水与饱和水蒸气热力性质表”, 可查得饱和温度为  $69.2^\circ\text{C}$ , 它即为露点,  $t_d = 69.2^\circ\text{C}$ 。

### 2. 求含湿量 $\omega$

将  $p_v = 0.3 \times 10^5 \text{ Pa}$  与  $p = 10^5 \text{ Pa}$  代入式(3-1-11), 即得含湿量  $\omega = 0.267$ 。

### 3. 求相对湿度 $\varphi$

先将湿空气温度  $t(200^\circ\text{C})$  视为饱和温度, 查“饱和水与饱和水蒸气热力性质表”, 可得对应的饱和水蒸气压力  $p_{sv} = 1.55 \text{ MPa}$ 。将  $p_v$  与  $p_{sv}$  代入式(3-1-4), 即得  $\varphi = 0.019$ 。由于本例中温度  $t$  对应的饱和水蒸气压力  $p_{sv}$  大于湿空气总体压力  $p$ , 即  $p_{sv} > p$ , 相对湿度应用另一种表达方式, 将  $p_v$  与  $p$  代入式(3-1-5), 即得相对湿度  $\varphi = 0.3$ 。

#### 4. 求绝对湿度(水蒸气密度) $\rho_v$

根据理想气体状态方程,

$$\rho_v = \frac{M_v p_v}{R(t + 273.15)}$$

将  $M_v, p_v, R$  及  $t$  代入上式, 可得

$$\rho_v = \frac{18.02 \times 10^{-3} \text{ kg/mol} \times 30 \text{ kPa}}{8.315 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \times 473.15 \text{ K}} = 0.137 \text{ kg/m}^3$$

之所以出现上述表示空气湿度多种方法, 是因为它们在不同场合各有其适用性。例如, 本书在讨论质量传递时, 更多使用的是水蒸气密度  $\rho_v$ , 也就是绝对湿度, 用它来分析与讨论水蒸气的质量变化更便于操作。而在天气预报空气湿度时, 大都用相对湿度  $\varphi$ , 显得直观与乐于被人们接受。例如,  $20^\circ\text{C}$  空气的相对湿度 90%, 表示当天的天气很潮湿, 已达到 90% 饱和程度。若用水蒸气分压  $p_v$  来表示,  $p_v = 0.021 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 即水蒸气压力约 2% 的大气压, 似乎是一个很小的湿度。又如, 很多工业设备在运行时, 其外部表面受湿空气冲刷, 为防止表面有水蒸气凝结, 必须控制表面温度不低于露点, 这里用露点来表示空气湿度就很直观。关于含湿量  $\omega$  应用场合在前面已有介绍。

除了用上述 5 种参数描述湿空气状态之外, 还有用诸如水蒸气的过热度及湿空气的饱和度等来表示空气湿度。各种表示空气湿度的方式可以相互换算, 并不能简单地替代。

### 3.1.3 干球温度、湿球温度及空气湿度

因为操作容易, 用干球温度与湿球温度来检测与控制空气的湿度是工业界及实验室工作中常见方法之一, 称为干湿球法。

用于测量空气湿度的湿度计由干球温度计、湿球温度计和用以形成湿空气流的风扇组成, 如图 3-5 所示。干球温度计就是通常使用的温度计, 测得湿空气温度  $t$ , 称为干球温度  $t_{\text{dry}}$ 。湿球温度计的温包被浸透水的纱布包裹, 所测得的温度称为湿球温度  $t_{\text{wet}}$ 。在湿球温度计温包上发生的物理过程比较复杂(在 3.3.1 节中将有更详尽介绍)。如果来流是未饱和的湿空气, 当它吹过湿球温度计时, 湿纱布上的水就蒸发, 致使纱布及温包的温度下降, 直到周围空气传给湿纱布的热量恰好等于纱布中水蒸发所需热量, 湿温包的温度才不再下降, 达到稳定的温度值。这个稳定的温度值就是湿球温度。它既是湿纱布中水的温度, 也是紧贴纱布饱和湿空气的温度。如果来流是饱和的湿空气, 那纱布中的水不会被蒸发, 湿球温度等于干球温

度。空气的相对湿度愈小,干、湿球温度差别愈大。人们正是利用这种物理现象,用干、湿球温度间接测量湿空气的湿度。

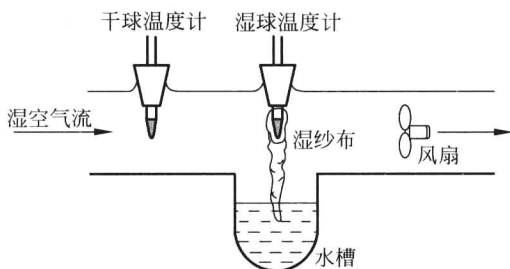


图 3-5 干湿球温度计工作原理图<sup>[3]</sup>

为了说明干、湿球温度与空气湿度之间的定量联系,作如下解释。

取 1 kg 温度为  $t_1$  的干空气,其相应地含湿量为  $\omega_1$ ,即有  $\omega_1$  kg 的水蒸气混合在 1 kg 的干空气中。这一湿空气的总能量,即总焓  $h_1$  为

$$h_1 = c_{a,1}t_1 + \omega_1 h_{sv,1} \quad (3-1-12)$$

式(3-1-12)中,总焓  $h_1$  是干空气的焓  $c_{a,1}t_1$  与水蒸气的焓  $\omega_1 h_{sv,1}$  之和。 $c_{a,1}$  是干空气在温度为  $t_1$  的比热容, $h_{sv,1}$  是温度  $t_1$  的饱和水蒸气的焓。当已知  $t_1$  时, $c_{a,1}$  与  $h_{sv,1}$  的数值分别可从“空气性质表”及“饱和水与饱和水蒸气热力性质表”中查得。把上述包含 1 kg 干空气与  $\omega_1$  kg 水蒸气的湿空气作为一个热力学体系,并让这个体系经历一个绝热冷却过程,也就是,体系与外界没有能量交换,没有向外界散发或吸收热量。若体系从外界逐渐吸入少量的水(忽略此少量水带入体系的能量),水在进入体系后从体系吸收热量而蒸发,使体系温度逐渐下降,水蒸气质量逐渐增加。相应地,相对湿度  $\varphi$  也逐渐升高直到  $\varphi=1$ 。由此停止水分的吸入,此时体系的温度为  $t_2$ ,含湿量为  $\omega_2$ ,水蒸气分压  $p_{v,2}$  即为温度  $t_2$  下的饱和水蒸气压力  $p_{sv,2}$ 。体系终态的总焓  $h_2$  表示为

$$h_2 = c_{a,2}t_2 + \omega_2 h_{sv,2} \quad (3-1-13)$$

式中, $h_{sv,2}$  是温度为  $t_2$  的饱和水蒸气的焓。由于从初态到终态经历的是一个绝热过程,则初态的总焓  $h_1$  与终态的总焓  $h_2$  是相等的,可写为

$$c_{a,1}t_1 + \omega_1 h_{sv,1} = c_{a,2}t_2 + \omega_2 h_{sv,2} \quad (3-1-14)$$

上式中的  $\omega_1$  与  $\omega_2$  用式(3-1-11)代入,使式(3-1-14)成为

$$c_{a,1}t_1 + \frac{0.622p_{v,1}}{p - p_{v,1}}h_{sv,1} = c_{a,2}t_2 + \frac{0.622p_{v,2}}{p - p_{v,2}}h_{sv,2} \quad (3-1-15)$$

这里再强调一下温度  $t_2$  的概念。它是温度  $t_1$ , 含湿量  $\omega_1$  的湿空气经过绝热冷却过程使其中水蒸气达到饱和状态所处的温度, 热力学上称为绝热饱和温度。它与实际测量的湿球温度的值相差无几。因此, 绝热饱和温度也称热力学湿球温度, 记作  $t_{wet}$ 。总之,  $t_{wet}$  是温度为  $t_1$  且含湿量为  $\omega_1$  体系的湿球温度,  $t_1$  是干球温度  $t_{dry}$ 。将式(3-1-15)改写为

$$c_{a,1}t_{dry} + \frac{0.622p_{v,1}}{p - p_{v,1}}h_{sv,1} = c_{a,2}t_{wet} + \frac{0.622p_{sv,2}}{p - p_{sv,2}}h_{sv,2} \quad (3-1-16)$$

式(3-1-16)即为体系内干球温度  $t_{dry}$ 、湿球温度  $t_{wet}$  及水蒸气分压  $p_{v,1}$  相互间的关系式。也就是说, 在测量得到干球温度  $t_{dry}$  与湿球温度  $t_{wet}$  后, 即可由式(3-1-16)求得湿空气中水蒸气分压  $p_{v,1}$ 。为此, 将式(3-1-16)写成关于水蒸气分压  $p_{v,1}$  是干球温度  $t_{dry}$  与湿球温度  $t_{wet}$  的显式表达如下:

$$p_{v,1} = \frac{\frac{p}{0.622h_{sv,1}} \left( c_{a,2}t_{wet} + \frac{0.622p_{sv,2}}{p - p_{sv,2}}h_{sv,2} - c_{a,1}t_{dry} \right)}{1 + \frac{1}{0.622h_{sv,1}} \left( c_{a,2}t_{wet} + \frac{0.622p_{sv,2}}{p - p_{sv,2}}h_{sv,2} - c_{a,1}t_{dry} \right)} \quad (3-1-17)$$

式中,  $p_{sv,2}$  与  $h_{sv,2}$  分别是湿球温度  $t_{wet}$  对应下的饱和水蒸气压力与饱和水蒸气的焓, 在已知  $t_{wet}$  后, 由查表求得。

空气湿度测量是计量领域中的难题之一。据称按原理划分有二三十种之多。除干湿球法之外, 还有: ①利用毛发、纤维等物质随空气湿度变化而伸缩的特性, 制成毛发湿度计; ②通过测量空气的露点温度来间接测量空气湿度, 称为露点湿度计; ③根据湿敏传感器的阻抗值的变化来求得湿度, 称为阻抗式湿度计; ④通过空气吸收微波辐射的程度来测量空气的湿度, 称为微波湿度计。不少研究者还在开发新的湿度计<sup>[4]</sup>。

综上所述, 这一节介绍了表示湿空气的各种方式及它们间的联系。也就是, 提供了描述水表面蒸发过程的部分环境条件, 它是讨论水面蒸发过程所必须的。下面介绍环境与水表面的传热传质条件。

## 3.2 水面上的边界层及表面对流传热、传质系数

处在热空气流环境中的水表面上所发生的传热传质过程是综合而复杂的物理现象。如果说, 当固体材料被空气流对流加热时, 固体表面与环境之间只有对流传



热,那么,当液相水表面被空气流对流加热时,液相水表面与环境之间不仅有对流传热,同时有对流传质。因此,在讨论如图 3-1 所示问题时,不仅要寻求表面传热系数  $h$ ,还需寻求表面传质系数  $h_m$ 。这一节将扼要介绍存在于液相水面上的边界层以及寻求表面传热系数  $h$  与表面传质系数  $h_m$  的途径。

### 3.2.1 速度、温度及水蒸气密度边界层

当温度为  $t_e$ 、速度为  $u_e$  及绝对湿度(水蒸气密度)为  $\rho_{v,e}$  的湿空气流过温度为  $t_s$  及水蒸气密度为  $\rho_{v,s}$ (此处下标 s 应理解为表面)的静止水表面,则水表面上建立起速度边界层、温度边界层及水蒸气密度边界层。在边界层内,速度、温度与水蒸气密度有显著的变化,而超出边界层的区域,速度、温度及水蒸气密度都不发生变化,如图 3-6 所示。边界层内的速度、温度及水蒸气密度分别用  $t$ 、 $u$  与  $\rho_v$  表示。

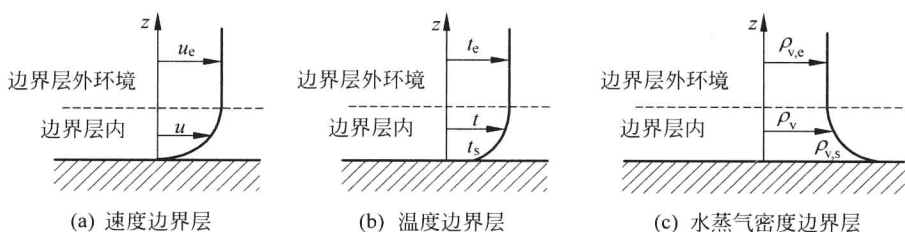


图 3-6 速度、温度及水蒸气密度边界层

#### 3.2.1.1 速度边界层

边界层理论<sup>[5]</sup>首先是在流体力学研究中由德国科学家普朗特(Prandtl, 1875—1953)于 1904<sup>[6]</sup>年提出并迅速得到发展的。其要点可表述为:流过固体表面的流体其所占据的空间可划分成两个区域,一是紧靠固体表面的边界层,另一区域则是表面参数的影响所不能及的广大空间,也即环境空间(见图 3-7)。在尺度上,边界层的厚度  $\delta$  比固体表面的尺度  $L$  要小很多。边界层外的广大流体,称为主流,也称势流,即流体为理想流体,无粘性。边界层内的流体呈现粘性,其行为符合粘性流体力学的规律。由于流体本身粘性的作用,当流体流过固体表面时,固体表面对流体呈现阻力(摩擦力),致使流体在固定表面处速度为零,这是粘性流体力学在边界层理论中的重要假定。也就是说,流体在固体表面没有滑动。

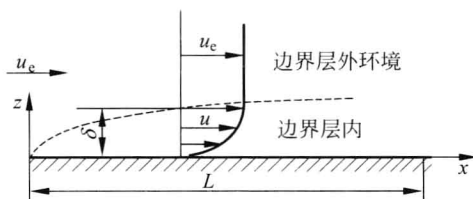


图 3-7 速度边界层示意图

人们对粘性流体流动规律的认识,应追溯到 1687 年牛顿(Isac Newton, 1643—1727)著名的粘性流动试验。牛顿发现,大多数流体的剪切应力与流体速度梯度成正比。此后,人们把这类流体称为牛顿流体。将这一认识应用到图 3-7 所示的速度边界层,对照图 3-1,当湿空气流流过平静水表面时(设想成流过固体表面),水表面处的空气流速度为 0,水表面单位面积对空气流的阻力为

$$z = 0 \quad \tau_s = -\eta \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3-2-1)$$

式(3-2-1)中, $u$  为边界层内速度,它是分布的,常用单位为  $\text{m/s}$ ;  $\eta$  是流体的动力粘度,常用单位为  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ;  $\tau_s$  是静止水表面单位面积对流体的阻力,也是流体在表面处的粘性力(剪应力),常用单位为  $\text{N/m}^2$ ;  $z$  是垂直水表面的坐标。式中负号表示阻力与速度方向相反。既然空气流在水表面处速度为 0,即表面处的空气是静止的。提醒读者注意,这里把水面视为绝对静止,犹如固体,把环境湿空气近似地视为单一的干空气。

式(3-2-1)中流体空气的动力粘度  $\eta$  可表示为

$$\eta = \rho \nu \quad (3-2-2)$$

式中, $\rho$  是空气密度; $\nu$  是空气运动粘度,常用单位为  $\text{m}^2/\text{s}$ 。将式(3-2-2)代入式(3-2-1),可得

$$z = 0 \quad \tau_s = -\nu \frac{\partial \rho u}{\partial z} \quad (3-2-3)$$

边界层内速度  $u$  的分布如图 3-7 所示,由表面处的  $u$  为 0 逐渐增大过渡到主流速度  $u_c$ 。相应地,流体内的粘性力在表面处最大,然后逐渐变小过渡到主流时为 0。

式(3-2-1)表示粘性力是由速度  $u$  在  $z$  方向的变化引起的,式(3-2-3)则表示粘性力是由动量  $\rho u$  在  $z$  方向的变化引起的。所以,速度边界层也称动量边界层。

### 3.2.1.2 温度边界层

1921年,波尔豪森(E. Pohlhausen)将速度边界层的概念推广到温度边界层<sup>[7]</sup>。这样,与速度边界层相仿,当温度为 $t_e$ 的流体流过温度为 $t_s$  ( $t_e \neq t_s$ )表面,在表面上建立起速度边界层的同时建立起温度边界层,如图3-6(b)所示。同样,从温度的角度把流体分成边界层与主流两个区域。边界层内流体温度 $t$ 是分布的,由表面温度 $t_s$ 逐渐变化到主流温度 $t_e$ ,主流温度 $t_e$ 是不变的。

由于流体在表面处速度为0,即表面处的流体是静止的。在静止流体内热量传递总是以导热的形式进行,即遵循傅里叶定律,可表示为

$$z=0 \quad q_s = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \quad (3-2-4)$$

式中, $t$ 是边界层内分布的温度; $\lambda$ 是气流空气的导热系数,根据式(2-1-7), $\lambda$ 又可表示为

$$\lambda = \rho \times c \times a \quad (3-2-5)$$

式中, $c$ 是空气比热容[J/(kg·K)]; $a$ 是空气的热扩散率(m<sup>2</sup>/s)。将式(3-2-5)代入式(3-2-4),可得

$$z=0 \quad q_s = -a \frac{\partial \rho c t}{\partial z} \quad (3-2-6)$$

式(3-2-6)中, $\rho c t$ 是单位容积空气所具有的焓(J/m<sup>3</sup>),即热能。这里,同样视湿空气为单一的干空气,焓中只有显热,不计潜热。

式(3-2-4)中的负号表示表面处的热流密度 $q_s$ 的流向与垂直表面的温度增长方向相反,若温度沿 $z$ 方向增长,热流则流向 $z$ 的反方向,由主流流向表面。相反,若温度沿 $z$ 方向下降,也就是,温度增长沿 $z$ 的反方向,则热流流向 $z$ 的正方向,由表面流向主流。

如果将式(3-2-4)理解为热流密度由温度梯度引起,则式(3-2-6)可理解为热流密度由热焓梯度引起。因此,温度边界层也称热边界层,或能量边界层。

### 3.2.1.3 水蒸气密度边界层

与速度边界层、温度边界层相仿,当环境湿空气中水蒸气密度为 $\rho_{v,e}$ (与水表面的水蒸气密度 $\rho_{v,s}$ 不同)的湿空气流流过水表面时,在水表面上建立起速度与温度边界层的同时建立起水蒸气密度边界层,如图3-6(c)所示。同样,从水蒸气密度的角度把空气流分成边界层与主流两个区域。边界层内湿空气的水蒸气密度 $\rho_v$

是分布的,由水表面的水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  逐渐变化到主流水蒸气密度  $\rho_{v,e}$ 。

由于湿空气流在水表面处速度为 0,即水表面处的湿空气是静止的。在静止的空气内,水蒸气质量的传输以扩散形式进行。我们知道,湿空气是干空气与水蒸气的混合气体,在多种气体共存的混合气体内,各组分气体间的相互扩散如同固体介质中的热扩散。在不计宏观质量迁移条件下,水蒸气对于干空气扩散的质量流密度  $q_m$  (对应于热流密度  $q_s$ ) 正比于水蒸气密度  $\rho_v$  的梯度。

关于气体扩散这一认识首先由费克(Adolf Engen Fick, 1829—1901)于 1855 年提出,被称为费克定律(也称费克第一定律)。将费克定律应用到水蒸气密度边界层内液相水表面上,则为

$$z = 0 \quad q_m = -D_{va} \frac{\partial \rho_v}{\partial z} \quad (3-2-7)$$

式(3-2-7)中,  $\rho_v$  为边界层内水蒸气密度,它是分布的;  $D_{va}$  是水蒸气在空气中质扩散率,常用单位为  $\text{m}^2/\text{s}$ ;  $q_m$  是水表面单位面积上单位时间内从水表面扩散到空气的水蒸气质量,称水蒸气质量流密度,常用单位是  $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$  或  $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{h})$ 。式中负号表示水蒸气质量流密度的方向与水蒸气密度梯度方向相反。若水蒸气密度沿  $z$  方向增长,表示水蒸气质量由主流流向表面,相反,若水蒸气密度沿  $z$  方向下降,则表示水蒸气质量由表面流向主流。

对比式(3-2-3)、式(3-2-6)与式(3-2-7)发现,它们之间十分类似。式(3-2-3)、式(3-2-6)与式(3-2-7)分别表示表面处单位体积流体动量  $\rho u$ 、能量  $\rho c t$  与质量  $\rho_v$  各自扩散流率(也称流密度)。三个公式中的系数  $\nu$ 、 $a$  及  $D_{ab}$  分别称为动量、能量及质量扩散率,它们具有相同的量纲。如下三个无量纲特征数反映了它们间的内在联系:

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad Le = \frac{a}{D_{ab}} \quad Sc = \frac{\nu}{D_{ab}} \quad (3-2-8)$$

式中,  $Pr$ 、 $Le$  与  $Sc$  分别称为普朗特数(Prendtl number)、路易斯数(Lewis number)与斯密特数(Schmit number),且分别表示了动量扩散对能量扩散、能量扩散对质量扩散以及动量扩散对质量扩散的关系。

式(3-2-3)、式(3-2-6)与式(3-2-7)之间的类似性,使人们有可能把对流体力学中物理现象的分析方法推广到传热传质学。在流体力学中,用式(3-2-3)通过寻求边界层内速度的分布来确定表面的阻力。这样,通过式(3-2-6)与式(3-2-7),在已知环境空气的热扩率  $a$  及水蒸气对空气的质扩散率  $D_{va}$  的条件下,只要求得边界层内温度  $t$  的分布与水蒸气密度  $\rho_v$  的分布就可以计算空气流与水表面之间的热流密度  $q_s$  及水蒸气质量流密度  $q_m$ 。这样,把求解表面上的传热传质问题转化为寻

求边界层内温度场及水蒸气密度场的问题。

在 20 世纪前 50 年,国际上许多杰出科学家,包括我国科学家<sup>[8]</sup>,先在流体力学中,针对不同条件,建立与求解了边界层动量方程,系统地创建了边界层理论。而后,又根据动量、能量及质量传递的可比拟性,使边界层理论更趋完善。边界层理论对科学与工程技術,特别是对航空航天技术的发展起了重要的作用。应该说,在计算机技术(包括计算方法等软件及计算机设备等硬件)相当发达的今天,计算各类边界层的速度、温度及密度分布已不是十分困难的事。但时至今日,在很多工程部门,广大工程及科学技术人员更习惯应用实验的方法,或在实验理论指导下的方法,来分析发生在流体与固体(包括静止水表面)交界面上的传热传质问题,把寻求表面热流密度  $q_s$  及水蒸气质量流密度  $q_m$  集中到寻求表面传热系数  $h$  及表面传质系数  $h_m$ 。

### 3.2.2 空气流对水表面的表面传热系数

早在 1701 年,牛顿在描述表面温度为  $t_s$  的固体被温度为  $t_e$  ( $t_s > t_e$ ) 的流动流体包围时,给出如下固体表面与流体之间的传热公式

$$q_s = h(t_s - t_e) \quad (3-2-9)$$

式(3-2-9)称为牛顿冷却公式,其中  $q_s$  为对流换热表面热流密度,即单位时间通过单位交界面的热量,常用单位为  $\text{W}/\text{m}^2$ ;  $h$  为表面传热系数,也称对流传热系数或对流换热系数,又称放热系数。由式(3-2-9)可将  $h$  写成

$$h = \frac{q_s}{t_s - t_e} \quad (3-2-10)$$

表面传热系数  $h$  的物理意义是,固定表面与流动流体的温度差为 1 个单位(1 K),在单位时间(1 s)通过单位交界面(1  $\text{m}^2$ )的热量 [ $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ]。为了进行表面热流密度  $q_s$  的计算,总是要求已知表面温度  $t_s$ 、流体温度  $t_e$  及表面传热系数  $h$ 。其中  $t_s$  与  $t_e$  往往可以直接测量,而  $h$  则通过在实验研究基础上建立起来的相关传热公式计算获得。

对比式(3-2-9)与式(3-2-4),可得

$$z = 0 \quad h(t_s - t_e) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \quad (3-2-11)$$

式(3-2-11)给我们的启示是,为求得表面热流密度  $q_s$ ,一方面,可以通过计算边界层内温度分布  $t(z, \tau)$ ,再由式(3-2-4)求得;另一方面,可以根据由实验关联式计算的表面传热系数  $h$  由式(3-2-9)得到。

若将式(3-2-11)与第2章中式(2-2-39)进行对比可发现,这两个公式在形式上是完全相同的,但其物理含义截然不同。式(2-2-39)是在讨论固体导热问题第三类边界条件时得到的,其物理含义是,在固体表面上来自固体内部的导热热流密度与传向环境的对流传热的热流密度相等,说明热流密度的连续性,两者相同。那里的 $\lambda$ 是固体材料的导热系数, $\partial t/\partial n$ 是固体表面处固体内的温度梯度。而式(3-2-11)中的 $\lambda$ 是流体介质的导热系数, $\partial t/\partial n$ 是靠近固体表面处流体内的温度梯度,式(3-2-11)中等号的含义是,固体表面上传向流体侧导热热流密度与对流热流密度是等效的,两者相同。此外,式(2-2-39)中的 $h$ 是作为已知边界条件给出的,而这里,用实验法寻求 $h$ 的计算式时,式(3-2-11)将用来导出一个含有 $h$ 的无量纲特征数,这个特征数是因变量。

现简要介绍用实验关联式寻求表面对流传热系数 $h$ 的步骤。

表面传热系数 $h$ 是受多种因素影响的一个参数。也就是说,针对不同因素(即不同条件),计算 $h$ 的实验关联式极不相同。如下概括地说明诸多因素中的几个主要因素。

(1) 流体流动的驱动因素。也就是说,流体是在外力驱动(风机、泵等)下流动还是自然流动(由于流体内部温度差别造成密度差别,在重力场的作用下而发生流动),相应地称为受迫对流与自然对流。本章图3-1所示问题,当属受迫对流。

(2) 流动的流体与静止表面两者所处的相对位置。即静止的表面被流体所包围还是流体被静止表面所包围。前者为外流,后者为内流,本章讨论的流动的空气掠过静止水面的问题当属外流。

(3) 流体所处的流动状态。流体所处的流动状态是根据雷诺数(Reynold number,  $Re$ )的大小来判断。 $Re$ 数的定义式为

$$Re = \frac{uL}{\nu} \quad (3-2-12)$$

式中, $u$ 是气流掠过静止表面的速度(m/s); $L$ 是流体与静止表面接触的尺度;若流体在圆管内流动, $L$ 则是圆管的直径,若流体与静止平面接触, $L$ 则是流体流过此平面的长度(m); $\nu$ 是流体的运动粘度( $m^2/s$ )。将 $u$ 、 $L$ 与 $\nu$ 代入式(3-2-12)右边后可发现, $Re$ 数是一个无量纲的特征数,其物理意义可理解为流体的惯性力与粘性力之比。为此,将式(3-2-12)改写成如下形式:

$$Re = \frac{\rho u^2}{\eta u/L} \quad (3-2-13)$$

式(3-2-13)中的分子代表惯性力,分母代表粘性力。当流体的惯性力很小而粘性力相对比较大时,即 $Re$ 数比较小时,流体处于层流状态。当流体的惯性力增大,

粘性力相对比较小时,  $Re$  数增大, 流体处于湍流状态。从层流向湍流过渡的雷诺数称为临界雷诺数, 记作  $Re_c$ 。

图 3-8 显示了流体流过固定(静止)表面时在其表面上边界层的形成及发展过程。边界层从  $x=0$  起由 0 渐渐变厚, 流体呈层流状态; 当  $x$  达到  $x_c$ , 边界层由层流状态过渡到湍流状态, 此时的  $Re$  数为临界雷诺数  $Re_c$ 。

$$Re_c = \frac{ux_c}{\nu}$$

针对平面上边界层, 临界雷诺数视条件不同其数值范围在  $1 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$  之间变化。作为一种典型, 本章讨论的图 3-1 的问题, 临界雷诺数取为  $Re_c = 5 \times 10^5$ 。

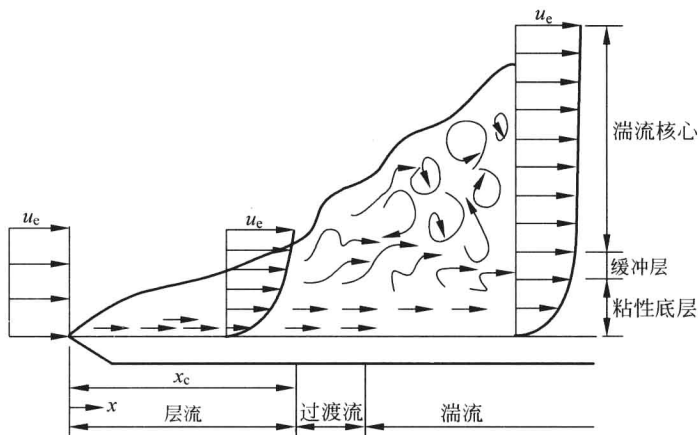


图 3-8 沿平板流动的速度边界层

(4) 流体介质的热物理性质。这里所说的热物理性质包括流体的密度  $\rho$ 、运动粘度  $\nu$ 、导热系数  $\lambda$  及比热容  $c$  等。

综上所述, 在计算表面传热系数之前, 先要确定是何种对流形式。若定为受迫外部对流形式, 则根据流体物性及流体流速等条件确定  $Re$  数, 再根据  $Re$  数大小确定层流或湍流。

不论属何种对流形式, 表面传热系数  $h$  总是被表示成无量纲的形式。为此, 为将式(3-2-11)转化为无量纲形式, 引入如下关于坐标  $z$  及温度  $t$  的无量纲量:

$$z^* = \frac{z}{L} \quad \text{与} \quad t^* = \frac{t - t_s}{t_e - t_s} \quad (3-2-14)$$

式中,  $z^*$  是无量纲坐标,  $t^*$  是无量纲温度。将式(3-2-14)代入式(3-2-11), 则式(3-2-11)可写成

$$\frac{hL}{\lambda} = \frac{\partial t^*}{\partial z^*} \bigg|_{z^*=0} \quad (3-2-15)$$

式(3-2-15)等号左边即是无量纲表面传热系数。命名此无量纲特征数为努塞尔数(Nusselt number), 记作  $Nu$ , 即

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} \quad (3-2-16)$$

在传热学的实验研究中, 人们总是把因变量(表面传热系数)与影响该因变量的诸多因素之间的关系整理成无量纲量之间的关系式, 称为特征数方程或实验关联式。对如气流掠过平面这类受迫对流问题, 根据  $Re$  数值大小给出不同实验关联式。若  $Re$  数小于  $Re_c$ , 边界层为层流, 求表面传热系数的实验关联式<sup>[10]</sup>为

$$Nu = 0.664 Re^{0.5} Pr^{0.33} \quad (3-2-17)$$

若  $Re$  数远大于  $Re_c$ , 边界层为充分发展的湍流边界层, 求表面传热系数的实验关联式为

$$Nu = 0.037 Re^{0.8} Pr^{0.33} \quad (3-2-18)$$

而对于  $Re$  数稍大于  $Re_c$  的情形, 边界层为层流与湍流混合边界层, 则相应地实验关联式为

$$Nu = (0.037 Re^{0.8} - A) Pr^{0.33} \quad (3-2-19)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= 0.037 Re_{x,c}^{0.8} - 0.664 Re_{x,c}^{0.5} \\ &= 0.037 \times (5 \times 10^5)^{0.8} - 0.664 \times (5 \times 10^5)^{0.5} \\ &= 817 \end{aligned}$$

将  $A$  代入式(3-2-19), 可得

$$Nu = (0.037 Re^{0.8} - 817) Pr^{0.33} \quad (3-2-20)$$

总之, 视条件不同, 分为自然对流或受迫对流、内流或外流、层流或湍流, 则相应地实验关联式也不同。限于本书的篇幅, 对此不作更详尽阐述, 读者可查阅相关的传热学教材<sup>[10,11]</sup>。

为什么在传热学中把寻求表面传热系数  $h$  的关系式都整理成无量纲量间的实



验关联式呢? 主要原因是, 实验关联式易于表示一组彼此相似的现象而不是某一个现象。这样, 它具有更概括性与普遍性。

下面针对图 3-1 所示问题, 介绍求表面传热系数  $h$  的步骤。

### 1. 求 $Re$ 数

确定式(3-2-12)定义式中的  $L$ , 它为空气流掠过水平面的长度, 例如,  $L = 1 \text{ m}$ 。确定式(3-2-12)定义式中的  $\nu$ , 它为空气的运动粘度, 其值可从“空气性质表”中根据空气温度求得, 例如, 空气流温度为  $80^\circ\text{C}$ , 则  $\nu = 2.13 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。确定式(3-2-12)定义式中的  $u$ , 它为空气流主流速度  $u_e$ , 例如,  $u_e = 10 \text{ m/s}$ 。由式(3-2-12)求得  $Re$  数,

$$Re = \frac{u_e L}{\nu} = \frac{10 \text{ m/s} \times 1 \text{ m}}{2.13 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 4.7 \times 10^5 \quad (3-2-21)$$

此  $Re$  数的值尚未达到临界雷诺数  $Re_c = 5 \times 10^5$  的值, 可以认定此流体处于层流状态。

### 2. 求 $Pr$ 数

空气的  $Pr$  数在“空气性质表”中根据空气温度可直接查得, 例如, 空气温度为  $80^\circ\text{C}$  时,  $Pr = 0.699$ 。

### 3. 求 $Nu$ 数

根据式(3-2-17),

$$\begin{aligned} Nu &= 0.664 Re^{0.5} Pr^{0.33} \\ &= 0.664 \times (4.7 \times 10^5)^{0.5} \times 0.699^{0.33} \\ &= 404.38 \end{aligned} \quad (3-2-22)$$

### 4. 求表面传热系数 $h$

先从“空气性质表”中根据空气温度 ( $80^\circ\text{C}$ ) 查得空气导热系数  $\lambda$  为  $0.03 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 再用式(3-2-16)求表面传热系数  $h$

$$\begin{aligned} h &= Nu \frac{\lambda}{L} = \frac{404.38 \times 0.03 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})}{1 \text{ m}} \\ &= 12.22 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K} \end{aligned} \quad (3-2-23)$$

## 3.2.3 水表面空气流的表面传质系数

将表面传质系数与表面传热系数直接联系起来的努力始于化学工程中讨论诸如蒸馏、蒸发及分馏等化工过程。路易斯 (Warren K. Lewis, 1882—1975) 是这一领域最杰出的科学家<sup>[12]</sup>。他在 1923 年首先将表面传质系数与表面传热系数直接

联系起来,式(3-2-8)关于路易斯数  $Le$  的定义正是热扩散率  $a$  与质扩散率  $D_{ab}$  之比。这样,与牛顿冷却公式(3-2-9)相仿,将空气流与水表面的水蒸气质量交换率表示为

$$\dot{m}_s = h_m(\rho_{v,s} - \rho_{v,e}) \quad (3-2-24)$$

式中,  $\dot{m}_s$  为表面水蒸气质量交换率,也称表面蒸发率,常用单位为  $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ ;  $\rho_{v,s}$  与  $\rho_{v,e}$  分别为水表面处与空气流主流中水蒸气密度,常用单位为  $\text{kg}/\text{m}^3$ ;  $h_m$  是表面传质系数,也称对流传质系数,或称对流质交换系数。请读者注意,这里的表面蒸发率与式(3-2-7)所示的水蒸气质量流密度单位相同名称不同。式(3-2-24)可改写为

$$h_m = \frac{\dot{m}_s}{\rho_{v,s} - \rho_{v,e}} \quad (3-2-25)$$

由式(3-2-25)可知,表面传质系数  $h_m$  的物理意义是,当水表面处水蒸气密度与空气流主流中的水蒸气密度差(是一种蒸发势)为 1 个单位时( $1 \text{ kg}/\text{m}^3$ ),在这样蒸发势推动下,单位时间(1 s)单位面积( $1 \text{ m}^2$ )上的水蒸气蒸发量。表面传质系数  $h_m$  的单位是  $\text{m}/\text{s}$ 。

将表示对流质量传输的式(3-2-24)与表示对流热量传输的式(3-2-9)进行比较,有利于对式(3-2-24)的理解与水蒸气蒸发率  $\dot{m}_s$  的计算。式(3-2-9)中温度  $t_s$  与  $t_e$  的差值作为推动热量传输的势,式(3-2-24)中密度  $\rho_{v,s}$  与  $\rho_{v,e}$  的差值作为水蒸气质量传输的势。

必须强调,式(3-2-9)中的温度差作为对流热量传输的唯一驱动力是恰当的,而式(3-2-24)中的水蒸气密度差作为对流水蒸气质量传输的唯一驱动力却不甚恰当。因为,在环境湿空气与水表面存在对流传热条件下,湿空气温度与水表面温度不同,这种温度差也能引起水蒸气质量迁移。因此,式(3-2-24)只有当环境空气与水表面温度相同时才合理。由此可见,在存在对流传热条件下,由式(3-2-24)表示水表面处水蒸气质量交换率是不够严格的,是近似的。它只近似地适用于环境与水表面温度差别不大的条件。然而,式(3-2-24)毕竟便于与式(3-2-9)对比,相应地数学处理比较容易,本书在以后章节中仍然采用。

下面我们分别介绍式(3-2-24)中水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  和  $\rho_{v,e}$  以及表面传质系数  $h_m$  的求取。

### 1. 求空气流主流中的水蒸气密度 $\rho_{v,e}$

在已知空气流的干球温度  $t_{\text{dry}}$  (也即  $t_e$ ) 与湿球温度  $t_{\text{wet}}$  之后,由式(3-1-17)即可求得空气流中的水蒸气分压  $p_{v,e}$ ,再由气体状态方程(3-1-11)求得水蒸气密度  $\rho_{v,e}$ 。

## 2. 求水表面的水蒸气密度 $\rho_{v,s}$

图 3-9 是放大的水表面, 0 表示水表面处, 在这个水表面以下, 即  $0^-$  及其以下, 全部都是液相的水。在这个水表面以上, 即  $0^+$  及其以上, 全部都是气相的水蒸气。而在严格意义的水表面, 即 0 处, 则是气、液两相共存, 它们具有共同的温度, 共存于该温度对应的饱和状态。这样,  $\rho_{v,s}$  是水表面温度对应下的饱和水蒸气密度  $\rho_{sv}$ , 即  $\rho_{v,s} = \rho_{sv}$ 。

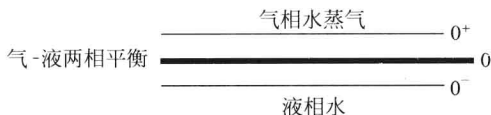


图 3-9 水表面上液相水与气相水蒸气的相平衡

## 3. 求表面传质系数 $h_m$

与表面传热系数  $h$  相仿, 表面传质系数  $h_m$  也总是被表示成无量纲形式。为此, 对比式(3-2-24)与式(3-2-7)可发现, 这两个公式是从两个方面反映同一个事实, 式(3-2-7)表示紧靠水表面静止空气内水蒸气扩散的质量流密度  $q_m [\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$ , 而式(3-2-24)表示水表面处在湿空气流对流环境下与环境的水蒸气质量交换率  $\dot{m}_s [\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$ , 即蒸发率。上述两个公式是相等的, 如同式(3-2-11), 也即  $q_m = \dot{m}_s$ , 由此可得

$$h_m(\rho_{v,e} - \rho_{v,s}) = D_{va} \frac{\partial \rho_v}{\partial z} \quad (3-2-26)$$

引入无量纲水蒸气密度  $\rho_v^*$

$$\rho_v^* = \frac{\rho_v - \rho_{v,s}}{\rho_{v,e} - \rho_{v,s}}$$

将无量纲坐标  $z^*$  与无量纲密度  $\rho_v^*$  代入式(3-2-26), 使式(3-2-26)成为

$$\frac{h_m L}{D_{va}} = \left. \frac{\partial \rho_v^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0} \quad (3-2-27)$$

式(3-2-27)等号左边即为无量纲表面传质系数。命名此无量纲特征量为舍伍德数(Shewood number), 记作  $Sh$ , 即

$$Sh = \frac{h_m L}{D_{va}} \quad (3-2-28)$$

若我们将图 3-6 中的温度边界层及水蒸气密度边界层内的  $t$  与  $\rho_v$  对  $z$  的分布重新画成  $t^*$  与  $\rho_v^*$  对  $z^*$  的分布, 则如图 3-10 所示。

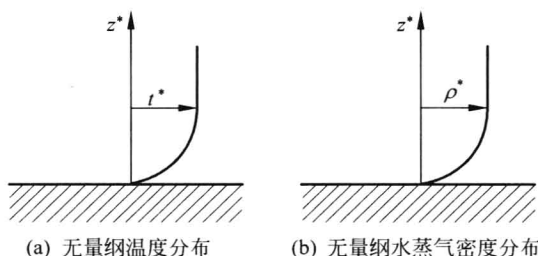


图 3-10 无量纲的温度与水蒸气密度在无量纲边界层内分布

根据传热与传质的类似性(可比拟性), 用无量纲形式表示的温度分布与水蒸气密度分布是相同的, 图 3-10 中的两个分布曲线完全重合。这样, 与式(3-2-17)、式(3-2-18)、式(3-2-19)相对应, 可写出

$$Sh = 0.664Re^{0.5} Sc^{0.333} \quad (3-2-29)$$

$$Sh = 0.037Re^{0.8} Sc^{0.33} \quad (3-2-30)$$

及

$$Sh = (0.037Re^{0.8} - 817) Sc^{0.33} \quad (3-2-31)$$

根据  $Re$  数的数值大小来选用上述三个方程中的其中一个。在确定实验关联式之后, 寻求  $h_m$  的方法与寻求  $h$  的方法就大致相同了, 现再罗列如下。

### 1. 求 $Re$ 数, 如式(3-2-21)

### 2. 求 $Sc$ 数

由“空气性质表”查得空气运动粘度  $\nu$ , 前面已有介绍。水蒸气对空气的质扩散率  $D_{va}$  也由表查得,  $D_{va} = 2.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。将  $\nu$  与  $D_{va}$  的数值代入式(3-2-8), 即有

$$Sc = \frac{\nu}{D_{va}} = 0.817 \quad (3-2-32)$$

### 3. 求 $Sh$ 数

根据式(3-2-29)

$$\begin{aligned} Sh &= 0.664Re^{0.5} Sc^{0.333} \\ &= 0.664 \times (4.7 \times 10^5)^{0.5} \times 0.817^{0.333} \\ &= 425.91 \end{aligned} \quad (3-2-33)$$

#### 4. 求 $h_m$

根据式(3-2-28)

$$\begin{aligned} h_m &= Sh \frac{D_{va}}{L} = \frac{425.91 \times 2.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}{1 \text{ m}} \\ &= 0.011 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (3-2-34)$$

### 3.3 物理数学模型

就本章提出的热空气流加热器皿中水这一问题而言,前两节介绍的环境空气湿度以及液相水表面传热、传质系数可视为外部条件。本节将在此基础上,先定性地描述水的整个加热过程,再作出若干简化假定,即建立物理模型,并在此基础上建立数学模型。

#### 3.3.1 物理模型

物理模型包括对静止水加热这一物理过程进行定性描述,并在此基础上作出若干简化假定。

##### 3.3.1.1 定性描述

当盛有水的器皿置于空气干球温度、湿球温度及气流速度已设定的环境中,环境的空气流与器皿中的水之间就开始热与质的交换。

从传热角度看,由于水的初始温度  $t_0$  低于环境空气流温度  $t_e$ ,空气流以对流的方式向静止液相水表面进行传热。从传质角度看,将根据水表面的水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  与环境空气中水蒸气密度  $\rho_{v,e}$  它们两者的高低来确定水蒸气的迁移方向。若  $\rho_{v,s} > \rho_{v,e}$ ,则水蒸气由水表面向环境迁移,水表面上出现液相水的蒸发。相反,若  $\rho_{v,s} < \rho_{v,e}$ ,则水蒸气由环境向水表面迁移,水表面出现水蒸气凝结。 $\rho_{v,s}$  取决于水表面的温度,它是水表面温度对应下的饱和水蒸气密度。 $\rho_{v,e}$  取决于湿空气状态,它是湿空气的绝对湿度。在干、湿球温度已知条件下, $\rho_{v,e}$  即被确定。它可通过式(3-1-17)由干球温度  $t_{\text{dry}} (=t_e)$  与湿球温度  $t_{\text{wet}}$  求得湿空气中水蒸气分压  $p_{v,e}$ ,再由状态方程(3-1-11)求得  $\rho_{v,e}$ 。此外, $p_{v,e}$  还是环境湿空气露点对应下的饱和水蒸气压力。总之,根据水表面的温度及环境空气的湿度可判断水表面上出现蒸发还是凝结。如果水温低于环境湿空气的露点,水表面的水蒸气凝结成液相水。若水表面温度高于湿空气露点,水表面的液相水被蒸发成水蒸气。

图 3-11 显示了单位面积( $1 \text{ m}^2$ )水表面处的质量与能量平衡关系。实线 0 表示水表面,实际是气-液共存的界面,虚线  $0^+$  表示水表面气相一侧,虚线  $0^-$  表示水表面液相一侧。

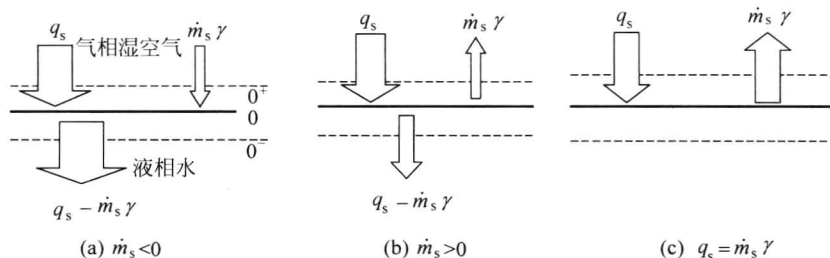


图 3-11 水表面处质量与能量平衡关系

先看气相一侧。加热过程开始,环境空气向水表面以对流方式传送热量,热流密度  $q_s$  由环境穿过  $0^+$  到达 0,见图 3-11(a)中  $q_s$  箭头。同时,环境与水面之间还有另一条途径进行着质量与能量的交换,有质量交换率(蒸发率或凝结率)  $\dot{m}_s$  以及  $\dot{m}_s$  所携带的能量  $\dot{m}_s \gamma$  穿过  $0^+$ ,这里的  $\gamma$  是液相水汽化潜热。若  $\dot{m}_s < 0$ ,水蒸气由环境穿过  $0^+$  到达 0,若  $\dot{m}_s > 0$ ,则由 0 穿过  $0^+$  到达环境,见图 3-11(a)与(b)中  $\dot{m}_s \gamma$  箭头。随着加热过程进行,水温升高。即便开始时水表面温度低于露点,也会逐渐达到并超过露点,且由  $\dot{m}_s < 0$  而转变成  $\dot{m}_s > 0$ 。随着水温升高,环境空气与水表面的温度差减小,  $q_s$  减小。而水表面处的水蒸气密度  $\rho_{v,s}$ ,它是对应于水表面温度的饱和水蒸气密度,随水表面温度升高而加大,相应地,水表面与环境间的水蒸气密度差加大,造成  $\dot{m}_s$  与  $\dot{m}_s \gamma$  加大。  $q_s$  减小与  $\dot{m}_s \gamma$  加大两者的合成,使  $q_s$  趋近于  $\dot{m}_s \gamma$ ,最终达到  $q_s = \dot{m}_s \gamma$ ,穿过水表面  $0^+$  的净热流为 0,见图 3-11(c)。

再看液相一侧。虚线  $0^-$  表示水表面液相一侧,加热过程开始,有热流密度  $(q_s - \dot{m}_s \gamma)$  由 0 穿过  $0^-$  传向液相水内部。若  $\dot{m}_s < 0$ ,表示液相水所获得的除空气以对流方式提供的热流密度  $q_s$ ,还有环境湿空气中水蒸气凝结所释放的热量  $\dot{m}_s \gamma$ ,这样,  $q_s - \dot{m}_s \gamma > q_s$ ,如图 3-11(a)中箭头  $q_s - \dot{m}_s \gamma$  所示。若  $\dot{m}_s > 0$ ,表示液相水所获得的是空气以对流方式提供的热流密度  $q_s$  扣除水表面液相水蒸发所需的热量  $\dot{m}_s \gamma$ ,这样,  $q_s - \dot{m}_s \gamma < q_s$ ,如图 3-11(b)中箭头  $q_s - \dot{m}_s \gamma$  所示。随着加热过程进行,当穿过  $0^+$  的净热流为零时,穿过  $0^-$  的净热流也为零,如图 3-11(c)所示,此时水温不再变化,保持在一个常数,这个不变的温度即为环境湿空气的湿球温度。这也就是图 3-5 中在温包上裹有湿纱布的温度计所测得的温度为湿球温度的工作原理。

当水温达到湿球温度后,一直保持不变,直到器皿中的水被全部蒸发掉。

值得提醒的是,这里说的湿球温度与前述 3.1.3 节中所定义的湿球温度的导出过程有所不同。这里湿球温度的导出比较直观,且易操作,而前述的湿球温度在热力学中的概念比较清晰,也便于从其他湿度表达式经过演算得到。在一定条件下,上述两种湿球温度在数值上十分接近,因此,在实用中常常被相互替代。也许,我们还可以把这两种湿球温度理解为传热学意义上的湿球温度与热力学意义上的湿球温度。

### 3.3.1.2 若干简化假定

为了对上述定性描述的过程进行定量的数学描述,还必须对实际过程作必要的简化,为此引入如下假定。

假定 1,环境湿空气流的温度  $t_e (=t_{\text{dry}})$  与湿度(绝对湿度、相对湿度、干湿球温度差、露点、水蒸气分压等)都是常数,保持不变。既不随空间变化,也不随时间变化。在空气流与静止的水面相互传热传质过程中,空气流的状态将影响器皿内水的状态,即空气流的温度与湿度将影响水的温度与质量,使它们随时间变化,称为水的热响应。而水的状态不影响空气流的状态,也即水的温度与质量的变化不引起空气流温度与湿度的变化。环境空气流的空间大大大于盛水器皿的空间,这个假定接近实际。

假定 2,水与空气的各种物性参数,如水的密度  $\rho$ 、水的比热容  $c$ 、水的汽化(蒸发)潜热  $\gamma$ 、空气密度  $\rho_a$ 、空气比热容  $c_a$ 、空气的动力粘度  $\eta$  与运动粘度  $\nu$  等均为常数。尽管实际空气是干空气与水蒸气的混合物,但在建立数学模型时,其中湿空气的比热容及粘度均采用干空气的相应参数。

假定 3,在讨论环境与水表面之间传热问题时,视环境空气为干空气,而在讨论传质问题时,视环境空气为含有水蒸气的湿空气。

假定 4,空气流动的方向平行于水表面,气流速度均匀,且为常数,水表面始终保持平静,犹如固体表面。忽略因水表面与空气流的摩擦可能引起的水平面波纹及水表面局部移动。

假定 5,器皿是完全绝热材料制成的。环境空气与器皿内的水之间的传热,只有通过水表面这唯一的途径,忽略实际存在的通过器皿底部与器皿壁把热量从空气传给水的可能性。即空气与水的传热、传质过程只发生在水与空气接触的水表面。相应地,只有  $z$  方向上的一维传递。

假定 6,器皿内的水在加热过程中始终保持静止,忽略可能存在的水的内部介质相对运动,使液相水内部的传热过程只有单纯的导热。

应该说,引入上述简化假定是为了建立便于数学表示的数学模型。若放弃其

中一些假定,数学模型的形式及进一步的求解过程就会复杂,甚至难以建立数学模型及进行求解。总之,在保证物理过程基本合乎实际过程前提下,适当引入简化条件是可取的,也是必要的。此外,若再增加一些假定,数学模型可更简化,这种更简化的数学模型也可用于预测一定条件下的实际过程。在本章下面几节将按简化程度不同,建立不同形式的数学模型。

### 3.3.2 数学模型 1——移动边界偏微分方程定解问题

一般而言,微分方程或微分方程组数学模型包括控制方程与定解条件两个方面,下面分别介绍。

#### 3.3.2.1 控制方程

建立控制方程就是根据质量与能量守恒原则,用数学的方法来描述器皿内水的质量(高度)及能量(温度)的变化规律。

##### 1. 质量守恒方程

器皿中水的质量  $m$  可表示为

$$m = LWH\rho \quad (3-3-1)$$

式中, $L, W$  与  $H$  分别表示器皿内水池的长度、宽度与高度,则三者的乘积  $LWH$  即为水池内液相水占有的体积, $\rho$  是水的密度。根据质量守恒的原则,水的质量  $m$  在单位时间内的变化量等于单位时间内水的蒸发(或凝结)量,可写作

$$\frac{dm}{d\tau} = -\dot{m}_s LW \quad (3-3-2)$$

上式中的负号表示水的蒸发只会引起水质量的减少。将式(3-3-1)代入式(3-3-2),可得

$$\rho \frac{dH}{d\tau} = -\dot{m}_s \quad (3-3-3)$$

式中, $\dot{m}_s$  为液相水表面处水的蒸发率,如式(3-2-24)所示,这里重写为

$$\dot{m}_s = h_m(\rho_{v,s} - \rho_{v,e}) \quad (3-3-4)$$

式中, $h_m$  是环境湿空气与液相水之间水蒸气质量交换的表面传质系数; $\rho_{v,s}$  是水表面处水蒸气密度,它是对应于水表面温度的饱和水蒸气密度,可表示为

$$\rho_{v,s} = f(t_s) \quad (3-3-5)$$



## 2. 能量守恒方程

根据上述物理模型中假定 5 与假定 6, 器皿中静止液相水内部只存在单纯的导热过程, 且导热只存在垂直水面的  $z$  方向, 则水内部能量守恒原则表现为一维非稳态导热微分方程, 如第 2 章中式(2-2-28), 这里改写为

$$\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (3-3-6)$$

水表面处的能量守恒关系在以下定解条件中介绍。

### 3.3.2.2 定解条件

#### 1. 几何条件

器皿内水域的宽度  $W$  与长度  $L$  已知, 且为常数。器皿内水的高度  $H$  随时间变化。  $H$  既是控制方程(3-3-6)的几何条件, 又是控制方程(3-3-3)的因变量。这使方程(3-3-3)与方程(3-3-6)相耦合。

#### 2. 初始条件

器皿内水的初始质量  $m = m_0$ , 也可表示为水的初始高度  $H = H_0$ 。同时, 器皿内水的初始温度  $t = t_0$ , 即

$$\tau = 0 \quad H = H_0 \quad (3-3-7)$$

$$\tau = 0 \quad t = t_0 \quad (3-3-8)$$

#### 3. 边界条件

对质量守恒方程(3-3-3)而言, 由于它是关于时间变量  $\tau$  的常微分方程, 有关边界处的传质情形已包含在方程(3-3-3)中, 因此, 不再存在单独的边界条件。

对能量守恒方程(3-3-6)而言, 其边界  $z=0$  与  $z=H$  处的条件可根据能量守恒原则来获得。在  $z=0$  处, 即器皿的底部, 根据上述物理模型中假定 5, 水与器皿底之间是绝热的, 即热流密度为 0, 也即

$$z = 0 \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (3-3-9)$$

在  $z=H$  处, 即水的表面处, 其能量守恒原则可对照图 3-11, 若将其中  $q_s$  表示为式(3-2-9)形式, 而进入水内部的热流密度写成傅里叶定律的形式, 则可得

$$z = H \quad h(t_e - t) - \dot{m}_s \gamma = \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \quad (3-3-10)$$

式(3-3-10)的物理含义是, 空气流以对流形式向水表面传输的热流密度  $q_s$  扣除用

于水在单位时间单位面积上蒸发所需热量 $\dot{m}_s\gamma$ 等于以导热方式传向液相水内部的热流密度。

将式(3-3-4)代入式(3-3-10),可得

$$z = H - h(t_e - t) - h_m(\rho_{v,s} - \rho_{v,e})\gamma = \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \quad (3-3-11)$$

将式(3-3-3)代入式(3-3-10),使式(3-3-10)成为

$$z = H - h(t_e - t) + \rho\gamma \frac{dH}{d\tau} = \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \quad (3-3-12)$$

上述式(3-3-10)、式(3-3-11)与式(3-3-12)是等价的,只是形式不同。但从这些形式不同的表达式中可以领悟到,发生在 $z=H$ 处的传热传质情形对液相水温度的影响。关于式(3-3-10)的物理含义在前面已有阐述。从式(3-3-11)可看到,环境湿空气条件(如 $t_e, \rho_{v,e}, h$ 及 $h_m$ )对从水表面导入液相水内部的热流密度的影响。而式(3-3-12)清楚地告诉我们因变量 $H$ 与 $t$ 的耦合关系,并由此可知,作为移动边界条件它的非线性特征。

#### 4. 物理条件

包含在上述控制方程及定解条件中的各物性参数,如水的密度 $\rho$ 、比热容 $c$ 、导热系数 $\lambda$ 、水的汽化潜热 $\gamma$ 以及表面传热系数 $h$ 与表面传质系数 $h_m$ 等是给定的,均为已知常数。

#### 3.3.2.3 数学模型

由上述控制方程(3-3-3)与式(3-3-6)以及相应定解条件构成数学模型。两个因变量 $H$ (或 $m$ )与 $t$ 对应于两个方程式,它们之间的耦合关系示意图3-12。

图中两个实线方框为因变量 $H(\tau)$ [或 $m(\tau)$ ]与 $t(z, \tau)$ ,它们两者的耦合通过多方面渠道体现,最明显的是通过变量蒸发率 $\dot{m}_s$ 。 $\dot{m}_s$ 既通过控制方程(3-3-3)影响 $H(\tau)$ ,又通过边界条件(3-3-10)影响 $t(z, \tau)$ 。同时, $\dot{m}_s$ 又通过式(3-3-4)受水表面水蒸气密度 $\rho_{v,s}$ 的影响,而 $\rho_{v,s}$ 通过式(3-3-5)受 $t(z, \tau)$ 的影响。

这个定解问题的一个显著特点是,求解过程是在边界尚待确定的区域内进行。由于求解域的边界是移动的,这类问题被称为移动边界

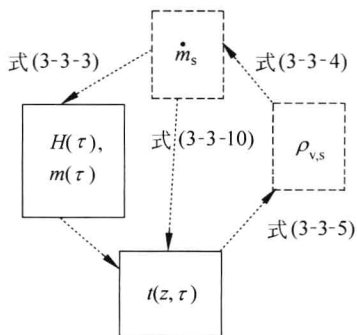


图 3-12 因变量 $H$ (或 $m$ )与 $t$ 间的耦合关系

问题。又由于边界移动是由边界上有液相的水转变成气相的水蒸气引起的,这类问题又被称为相变问题<sup>[13]</sup>。还由于这类相变问题最早由斯蒂芬于 1891 年针对冰的形成提出来的,相变问题又称为斯蒂芬问题<sup>[14]</sup>。

由于移动边界上的边界条件是非线性的<sup>[13]</sup>,因此,这类问题的解析求解相当困难,往往求助于数值求解。

### 3.3.3 数学模型 2——常微分方程组初值问题

如果在 3.3.1 节中介绍的物理模型基础上再引入一项简化假定,使物理模型简化。相应地,数学模型也被简化,将原有移动边界的偏微分方程问题简化为常微分方程组问题。

引入的简化假定认为,器皿内水的温度始终是均匀的,忽略其内部存在的温度差别。由此,使水的温度由  $t=t(z,\tau)$  简化成  $t=t(\tau)$ ,即只是时间的函数。这种将分布的参数给以集总的方法称为集总参数法<sup>[15]</sup>。为了说明这一方法的合理性及对应的前提条件,作如下解释。

由于环境空气温度与器皿中水的温度不同,由此建立温度差。在这种温度差驱动下所形成的热流从环境空气传向水的表面,穿过水表面的热流继续传向器皿的底部。这条从环境到水表面,再由水表面至器皿底部的热流路径总计由两个热阻  $R_{\text{conv}}$  与  $R_{\text{cond}}$  串联而成,如图 3-13 所示。其中  $R_{\text{conv}}$  是空气流与水表面之间的对流传热热阻,  $R_{\text{conv}}=1/h$ 。  $R_{\text{cond}}$  是液相水内部垂直于水表面的导热热阻,  $R_{\text{cond}}=H/\lambda$ 。  $R_{\text{conv}}$  与  $R_{\text{cond}}$  为面积热阻,它们的单位是  $(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})/\text{W}$ 。

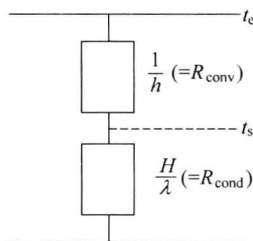


图 3-13 热阻串联网络

在导热问题分析中,把相似特征数毕渥数  $Bi$  是否小于 0.1 作为是否可采用集总参数法的条件<sup>[9]</sup>。针对本节所讨论的问题,  $Bi$  数的定义为  $Bi=hH/\lambda$ 。不难发现,  $Bi$  数正是上述导热热阻  $H/\lambda$  与对流热阻  $1/h$  之比。若取水表面传热系数  $h=12.22 \text{ W}/\text{m}^2$  [见式 (3-2-23)], 水的初始高度  $H_0=5 \text{ mm}$ , 水的导热系数  $\lambda=0.62 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 则

$$Bi = \frac{hH_0}{\lambda} = \frac{12.22 \text{ W}/\text{m}^2 \times 5 \times 10^{-3} \text{ m}}{0.62 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} < 0.1$$

在此条件下,水的内部热阻  $R_{\text{cond}}$  与水表面热阻  $R_{\text{conv}}$  相比可忽略,即水中的温度差别可忽略。

下面介绍根据质量守恒与能量守恒原则运用集总参数法建立控制方程。

### 1. 质量守恒方程

与 3.3.2 节相同,式(3-3-1)、式(3-3-2)与式(3-3-3)继续有效,现将式(3-3-4)代入式(3-3-3),可得

$$-\rho \frac{dH}{d\tau} = h_m(\rho_{v,s} - \rho_{v,e}) \quad (3-3-13)$$

### 2. 能量守恒方程

对照图 3-11,根据能量守恒原则,可得

$$h(t_e - t)LW - \dot{m}_s \gamma LW = \frac{dmct}{d\tau} \quad (3-3-14)$$

式(3-3-14)的物理含义是,单位时间内空气流以对流形式向液相水传输的能量扣除液相水蒸发所需热量等于液相水能量的增加。

将式(3-3-4)及式(3-3-1)代入式(3-3-14),稍加整理后即可得

$$\rho c \frac{dHt}{d\tau} = h(t_e - t) - h_m(\rho_{v,s} - \rho_{v,e})\gamma \quad (3-3-15)$$

### 3. 初始条件

式(3-3-13)与式(3-3-15)都是以时间  $\tau$  为自变量的常微分方程,由它们构成一个常微分方程组的初值问题。为保证该问题具有唯一解,必须提供初始条件,即给出初始时水的高度与温度。

$$\tau = 0 \quad H = H_0 \quad (3-3-16)$$

$$\tau = 0 \quad t = t_0 \quad (3-3-17)$$

总之,由式(3-3-13)及式(3-3-15)~式(3-3-17)构成一个定解的常微分方程组初值问题,它是简化后的数学模型。

上述方程中,自变量是时间  $\tau$ ,因变量是水的高度  $H(\tau)$  及温度  $t(\tau)$ ,其他各量均为参变量,这些参变量都是常数,如  $\rho, c, H_0, t_0, \rho_{v,e}$  及  $t_e$ ,此外,  $h$  与  $h_m$  也已作为定解条件求得。

参数  $\rho_{v,s}$  出现在控制方程(3-3-13)与方程(3-3-15)中,它唯一取决于温度  $t(\tau)$ ,因此,它也是方程中的因变量。另外,式(3-3-15)中的导函数是以因变量  $H$  与  $t$  的乘积形式出现。上述这两个因素都使得方程(3-3-13)与方程(3-3-15)具有非线性特征且相互耦合。对于这类方程组用解析的方法求解很困难。因此,求助于数值求解。

### 3.3.4 数学模型 3——代数方程

在一定条件下,上述数学模型 1 与数学模型 2 还可进一步简化。

回顾 3.3.1 节物理模型中描述的图 3-1 所示一池水被加热的全过程。这池水在经历初期非稳态阶段之后,进入准稳态阶段。在准稳态阶段中,水温  $t$  保持不变,维持在环境湿空气的湿球温度  $t_{\text{wet}}$ 。蒸发率  $\dot{m}_s$  为常数,水表面的高度  $H$  随时间  $\tau$  线性地下降。如果这个准稳态过程所经历的时间占据整个加热过程的大部分,这样,准稳态过程就近似的代表全过程。

对照图 3-11(c),当过程处于准稳态阶段,水温不变,即进入水内部的热流密度为 0。也即,从环境空气流传向水表面的热量全部用于液相水的蒸发。在此条件下,能量方程简化为

$$q_s = \dot{m}_s \gamma \quad (3-3-18)$$

将式(3-2-9)与式(3-2-24)分别代入式(3-3-18)的等号两边,则有

$$h(t_e - t) = h_m(\rho_{v,s} - \rho_{v,e})\gamma \quad (3-3-19)$$

如果  $h, h_m, t_e, \rho_{v,e}$  及  $\gamma$  作为已知的定解条件,方程(3-3-19)只包含一个因变量  $t$ 。也就是说,式(3-3-19)是关于因变量  $t$  的代数方程。由于因变量  $t$  不只是直接显示在方程中,还隐函于  $\rho_{v,s}$  之中,因此,对因变量的求解也不很容易,需求助于数值方法。

在求得温度  $t$  之后,由式(3-3-5),实际是通过查表求得  $\rho_{v,s}$ ,再由式(3-3-4)求得  $\dot{m}_s$ ,最后将  $\dot{m}_s$  代入下式

$$m = m_0 - \dot{m}_s L W \tau \quad (3-3-20)$$

由式(3-3-20)可得液相水质量  $m$  随时间  $\tau$  的变化。若将  $\dot{m}_s$  代入下式

$$H = H_0 - \frac{\dot{m}_s \tau}{\rho} \quad (3-3-21)$$

由式(3-3-21)可得液相水高度  $H$  随时间  $\tau$  的变化。上述式(3-3-20)与式(3-3-21)是方程(3-3-2)与方程(3-3-3)在  $\dot{m}_s$  为常数假定下求得的解。

## 3.4 数学模型的数值求解

这一节主要介绍上述数学模型 1 与数学模型 2 的数值求解。首先是,将微分方程问题转化为差分形式的代数方程组问题。由于本节介绍的差分方程都表示为

显式格式,代数方程组的求解就变得比较简单。对数学模型 3 只是迭代法求解单个代数方程。

### 3.4.1 数值求解移动边界偏微分方程定解问题

上述数学模型 1 中给出的移动边界偏微分方程问题就是移动边界的一维非稳态导热问题。因此,其数值求解方法与第 2 章固体材料加热中介绍的方法大体相同<sup>[16]</sup>,只对移动的边界需另行处理。

#### 3.4.1.1 移动边界条件下的单元与节点

在建立差分方程前必须对求解域作离散化处理。对照图 2-18,它在那里显示了高度  $H$  不变的  $[0, H]$  范围内离散节点与离散单元,也是这里移动边界(高度  $H$  变化的)过程初始状态时的离散节点与离散单元,如图 3-14。单元(节点)从  $j=1$  到  $j=JZ$ ,单元数与节点数相同,都为  $JZ$  个,此处记作  $NJZ$ ,即  $JZ = NJZ$ 。在图 3-14 中,  $\Delta z$  表示相邻两节点的距离,  $\Delta z_s$  是移动边界节点( $j=JZ$ )与其邻近节点的间距。初始时,  $\Delta z_s = \Delta z$ 。  $\delta z$  表示单元的高度,在内部单元,  $\delta z = \Delta z$ ,而在边界的一端,即  $j=1$ ,与器皿的底部相邻,  $\delta z = \Delta z/2$ 。在边界的另一端,即  $j=JZ$ ,处于移动的水表面,单元高度  $\delta z$  记作  $\delta z_s$ ,且

$$\delta z_s = \Delta z/2 \quad (3-4-1)$$

表示边界单元的高度只是内部单元高度的一半,同时,

$$\Delta z_s = \Delta z/2 + \delta z_s \quad (3-4-2)$$

表示边界节点与内部节点之间的步长与内部节点间的步长相同。液相水初始高度  $H_0$  为

$$H_0 = \sum_{j=1}^{JZ} \delta z_j = \sum_{j=1}^{JZ-1} \Delta z_j \quad (3-4-3)$$

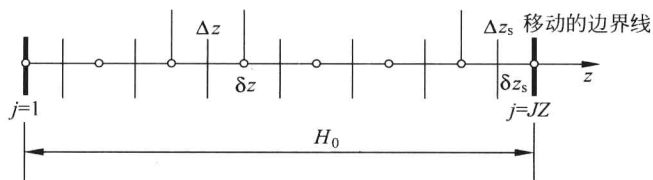


图 3-14 过程初始时的节点与单元

加热过程开始后,边界将移动,若有水蒸气凝结,水的质量增加,水表面升高,图 3-14 中的边界线(粗实线)向右移动。若水被蒸发,水质量减少,水表面下降,边界线向左移动。边界移动的速度可由式(3-3-3)所示的水的质量平衡方程求得,为此,将式(3-3-3)写成差分形式如下:

$$\frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta\tau} = -\frac{\dot{m}_s^{n+1}}{\rho} \quad (3-4-4)$$

其中

$$H^{n+1} - H^n = \sum_{j=1}^{JZ} (\delta z_j^{n+1} - \delta z_j^n) = \sum_{j=1}^{JZ-1} (\Delta z_j^{n+1} - \Delta z_j^n) \quad (3-4-5)$$

在边界刚开始移动阶段,内部单元的高度  $\delta z$  与内部节点间的步长  $\Delta z$  保持不变,而边界单元的高度  $\delta z_s$  与边界处节点的步长  $\Delta z_s$  将发生变化。也就是说,水池内水的高度变化只体现在边界单元高度  $\delta z_s$  及边界节点步长  $\Delta z_s$  的变化,在这个过程中,边界节点始终处在移动的边界上。根据式(3-4-5),可写得

$$H^{n+1} - H^n = \delta z_s^{n+1} - \delta z_s^n = \Delta z_s^{n+1} - \Delta z_s^n \quad (3-4-6)$$

将式(3-4-6)代入式(3-4-4),可得

$$\delta z_s^{n+1} = \delta z_s^n - \frac{\dot{m}_s^{n+1}}{\rho} \Delta\tau \quad (3-4-7)$$

及式(3-4-2)成为

$$\Delta z_s^{n+1} = \Delta z/2 + \delta z_s^{n+1} \quad (3-4-8)$$

式(3-4-7)中的  $\dot{m}_s^{n+1}$  为

$$\dot{m}_s^{n+1} = h_m (\rho_{v,s}^{n+1} - \rho_{v,e}) \quad (3-4-9)$$

其中  $\rho_{v,s}^{n+1}$  为对应于温度  $t_{jZ}^{n+1}$  的饱和水蒸气密度。

当蒸发过程持续一定时间,即边界移动(水表面高度下降)了一段距离,边界单元高度  $\delta z_s$  不断变小而达到零,即边界单元被完全蒸发,原先在边界上的节点自行消失,原先靠近边界的内部节点成为新的边界节点,并处在移动的边界上,如图 3-15 所示。此时,单元数与节点数都减少一个,即  $JZ = NJZ - 1$ ,且

$$\delta z_s = \Delta z \quad (3-4-10)$$

对照式(3-4-10)与式(3-4-1)发现,在第一个边界单元被蒸发完后,相应产生的边界单元其高度  $\delta z_s$  变成  $\Delta z$ 。而边界节点与其邻近节点间的步长  $\Delta z_s$  其表达

形式保持式(3-4-2)不变。

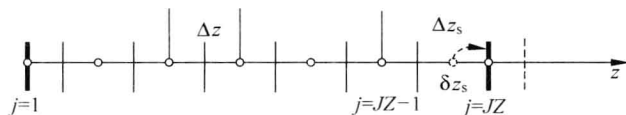


图 3-15 第一个边界单元被蒸发完时的节点与单元

当蒸发过程不断地持续,水表面高度不断地下降,即边界线不断向左移动,如图 3-16。

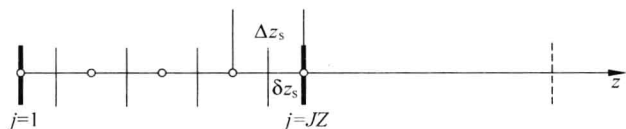


图 3-16 边界移动过程中求解域内节点与单元

在整个蒸发过程中,也即在边界移动(水表面高度下降)过程中,求解域中内部单元的尺寸始终保持不变,即  $\delta z$  与  $\Delta z$  的值始终保持不变,变化的只是  $\delta z_s$  与  $\Delta z_s$  的值。单元的数目在减少,也即  $JZ$  由  $JZ = NJZ$ ,而逐渐变为  $JZ = NJZ - 1$ ,  $JZ = NJZ - 2, \dots$ ,直至  $JZ = 1$ 。

### 3.4.1.2 差分方程

在边界移动过程中,质量守恒方程(3-3-3)的差分形式已表示为式(3-4-4)或式(3-4-7)。能量方程(3-3-6)及相应边界条件式(3-3-9)与式(3-3-10)的差分形式分别推导如下。推导过程从  $j=1$  到  $j=JZ$ 。

当  $j=1$ ,即处于器皿底部的单元,将式(3-3-9)所示的边界条件用控制容积法写成差分形式为

$$\lambda \frac{t_{j+1}^n - t_j^n}{\Delta z} = \rho c \frac{t_j^{n+1} - t_j^n}{\Delta \tau} \frac{\Delta z}{2} \quad (3-4-11)$$

式(3-4-11)的物理含义为,靠近底部单元( $j=2$ )向底部单元( $j=1$ )以导热方式在单位时间内传入的热量等于底部单元能量的增加,此式经整理后为

$$t_j^{n+1} = (1 - 2f)t_j^n + 2ft_{j+1}^n \quad (3-4-12)$$



其中,  $f = \frac{\lambda \Delta \tau}{\rho c \Delta z^2}$ , 如同式(2-4-18)。

当  $1 < j < JZ - 1$ , 即处于不包含底部单元 ( $j = 1$ ) 与水表面附近单元 ( $j = JZ - 1$ ) 的内部区域单元, 方程(3-3-6)改写成差分方程为

$$\lambda \frac{t_{j-1}^n - t_j^n}{\Delta z} + \lambda \frac{t_{j+1}^n - t_j^n}{\Delta z} = \rho c \frac{t_j^{n+1} - t_j^n}{\Delta \tau} \Delta z \quad (3-4-13)$$

式(3-4-13)经整理后为

$$t_j^{n+1} = ft_{j-1}^n + (1 - 2f)t_j^n + ft_{j+1}^n \quad (3-4-14)$$

式(3-4-14)如同式(2-4-19)。

当  $j = JZ - 1$ , 即处于邻近水表面的单元, 方程(3-3-6)改写成的差分方程为

$$\lambda \frac{t_{j-1}^n - t_j^n}{\Delta z} + \lambda \frac{t_{j+1}^n - t_j^n}{\Delta z_s} = \rho c \frac{t_j^{n+1} - t_j^n}{\Delta \tau} \Delta z \quad (3-4-15)$$

式(3-4-15)与式(3-4-13)的差别是, 式(3-4-13)中有一项  $\Delta z$  被  $\Delta z_s$  所替代。式(3-4-15)经整理后可为

$$t_j^{n+1} = ft_{j-1}^n + \left[ 1 - f \left( 1 + \frac{\Delta z}{\Delta z_s} \right) \right] t_j^n + f \frac{\Delta z}{\Delta z_s} t_{j+1}^n \quad (3-4-16)$$

当  $j = JZ$ , 即处于水表面的单元, 将式(3-3-10)所示边界条件用控制容积法写成差分方程为

$$h(t_e - t_j^n) - \dot{m}_s^n \gamma = \rho c \frac{t_j^{n+1} - t_j^n}{\Delta \tau} \delta z_s + \lambda \frac{t_j^n - t_{j-1}^n}{\Delta z_s} \quad (3-4-17)$$

式(3-4-17)经整理后为

$$\begin{aligned} t_j^{n+1} = & \frac{\lambda \Delta \tau}{\rho c \Delta z_s \delta z_s} t_{j-1}^n + \left( 1 - \frac{\lambda \Delta \tau}{\rho c \Delta z_s \delta z_s} - \frac{h \Delta \tau}{\rho c \delta z_s} \right) t_j^n \\ & + \frac{\Delta \tau (ht_e - \dot{m}_s^n \gamma)}{\rho c \delta z_s} \end{aligned} \quad (3-4-18)$$

当  $JZ = 1$  时, 表示处于水表面的单元即为靠近器皿底部的单元, 也就是, 水的整个高度只剩下一个单元的高度。为此, 将式(3-3-9)与式(3-3-10)所示边界条件合而为一, 用控制容积法写成差分方程为

$$h(t_e - t_j^n) - \dot{m}_s \gamma = \rho c \frac{t_j^{n+1} - t_j^n}{\Delta \tau} \delta z_s \quad (3-4-19)$$

式(3-4-19)经整理后为

$$t_j^{n+1} = \left(1 - \frac{h\Delta\tau}{\rho c \delta z_s}\right) t_j^n + \frac{\Delta\tau(ht_e - \dot{m}_s \gamma)}{\rho c \delta z_s} \quad (3-4-20)$$

上述差分方程式(3-4-11)~式(3-4-20)包括了控制方程与边界条件。差分形式的初始条件可从式(3-3-7)与式(3-3-8)得到。反映高度  $H$  的式(3-3-7)所示的初始条件在图 3-14 中已充分体现,由式(3-4-3)表示,反映温度  $t$  的式(3-3-8)所示的初始条件可写为

$$\tau = 0 \quad t_j^n = t_0 \quad n = 1; j = 1; 2, \dots, JZ \quad (3-4-21)$$

至此,将 3.3.2 节中介绍的由式(3-3-3)~式(3-3-10)所表示的移动边界偏微分方程定解问题转化为由式(3-4-7)、式(3-4-12)、式(3-4-14)、式(3-4-16)、式(3-4-18)、式(3-4-20)及式(3-4-21)表示的差分方程定解问题。

### 3.4.1.3 求解步骤

求解上述差分方程定解问题的计算流程如图 3-17 所示,整个计算过程分如下 9 个步骤。

步骤 1,完成节点与单元的划分,并赋予初值。即确定单元与节点的几何尺寸及初始温度,初始表面蒸发率,特别是定义边界单元高度  $\delta z_s^n = \Delta z/2$ ;

步骤 2,计算各单元(节点)的温度  $t_j^{n+1} (j=1, 2, \dots, JZ)$ ;

步骤 3,由边界温度  $t_j^{n+1}$  求得水表面水蒸气密度  $\rho_{v,s}^{n+1}$ ,计算表面蒸发率  $\dot{m}_s^{n+1}$ ;

步骤 4,计算边界单元高度的变化,即确定  $\delta z_s^{n+1}$  与  $\Delta z_s^{n+1}$ ;

步骤 5,判断处于水表面的边界单元是否已被蒸发干净,即判断高度  $\delta z_s^{n+1}$  是否为零。若  $\delta z_s^{n+1} > 0$ ,回到步骤 2 作下一时刻的计算,若  $\delta z_s^{n+1} \leq 0$ ,说明边界单元已消失,进入步骤 6;

步骤 6,重新定义单元的数目及边界单元的高度,  $\delta z_s^n = \Delta z$ ,它区别于步骤 1 中的  $\delta z_s^n = \Delta z/2$ 。

步骤 7,判断处于水表面的边界单元是否已成为靠近器皿底部的底部单元。若  $JZ > 1$ ,回到步骤 2 作下一时刻的计算,若  $JZ = 1$ ,表示边界单元已成为靠近器皿底部的底部单元,进入步骤 8;

步骤 8,计算最后一个单元,即既是表面单元又是底部单元的高度与温度;

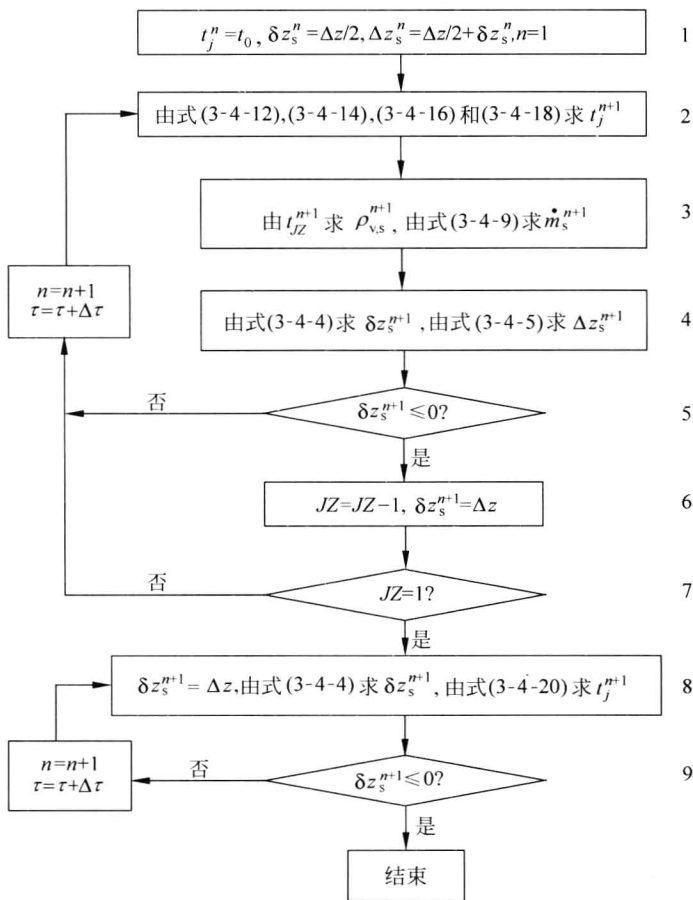


图 3-17 计算流程图

步骤 9, 判断最后这个单元是否被蒸发干净, 即判断高度  $\delta z_s^{n+1}$  是否为零。若  $\delta z_s^{n+1} > 0$ , 回到步骤 8 作下一时刻的计算, 若  $\delta z_s^{n+1} \leq 0$ , 说明边界单元已消失, 计算结束。

### 3.4.2 数值求解常微分方程组初值问题

对上述由式(3-3-13)、式(3-3-15)、式(3-3-16)与式(3-3-17)所组成的常微分方程组初值问题用有限差分法进行求解是一件相对比较容易的事, 但必须先将微分方程转变成差分方程。

### 3.4.2.1 差分方程

在数值计算中已有许多方法可用来求解上述常微分方程组初值问题,其中龙格-库塔(Runge Kutta)法是最常见的一种,它具有较高的计算精确度,可以在一般有关常微分方程数值解的书籍中找到<sup>[17]</sup>。

为了便于理解及减少书写篇幅,这里介绍一种最简单的求解上述常微分方程组初值问题的数值方法——欧拉(Eular)法。只要把时间步长  $\Delta\tau$  取得足够的小,欧拉法也同样能保证计算精确度。为了便于用欧拉法,将微分方程式(3-3-13)及式(3-3-15)写成差分方程形式。

水质量守恒微分方程(3-3-13)的差分形式为

$$\frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta\tau} = -\frac{h_m}{\rho}(\rho_{v,s}^n - \rho_{v,e}) \quad (3-4-22)$$

将上式整理后可得

$$H^{n+1} = H^n - \frac{h_m}{\rho}(\rho_{v,s}^n - \rho_{v,e})\Delta\tau \quad (3-4-23)$$

水能量守恒微分方程(3-3-15)的差分形式为

$$\frac{H^{n+1}t^{n+1} - H^nt^n}{\Delta\tau} = \frac{h}{\rho c}(t_e - t^n) - \frac{h_m}{\rho c}(\rho_{v,s}^n - \rho_{v,e})\gamma \quad (3-4-24)$$

将上式整理后可得

$$t^{n+1} = \frac{1}{H^{n+1}} \left\{ H^nt^n + \Delta\tau \left[ \frac{h}{\rho c}(t_e - t^n) - \frac{h_m}{\rho c}(\rho_{v,s}^n - \rho_{v,e})\gamma \right] \right\} \quad (3-4-25)$$

初始条件式(3-3-16)及式(3-3-17)继续有效。这样,由式(3-3-13)、式(3-3-15)、式(3-3-16)及式(3-3-17)构成的常微分方程组定解问题转化成由式(3-4-23)、式(3-4-25)、式(3-3-16)及式(3-3-17)构成的差分方程定解问题。

### 3.4.2.2 求解步骤

求解上述差分方程定解问题的任务是寻求水高度  $H$  与水温度  $t$  随时间的变化。纵观式(3-4-23)与式(3-4-25),其计算步骤如下:

步骤 1, 给出水的初始高度  $H_0$  与初始温度  $t_0$ , 记作  $H^n$  与  $t^n$ ,  $n=1$ 。根据  $t_0$ , 由“饱和水与饱和水蒸气热力性质表”查得对应的饱和水蒸气密度, 记作  $\rho_{v,s}^n$ 。

步骤 2, 给出空气流的干球温度  $t_e(t_{\text{dry}})$  与湿球温度  $t_{\text{wet}}$ , 由式(3-1-17)求得

$p_{v,e}$ , 进而由理想气体状态方程求得  $\rho_{v,e}$ 。

步骤 3, 给出气流速度  $u_e$  及由“空气性质表”查得空气相关物性参数, 求得表面传热系数  $h$  及表面传质系数  $h_m$ 。

步骤 4, 给定时间步长  $\Delta\tau$ , 如,  $\Delta\tau=1\text{ s}$ , 或  $\Delta\tau=10\text{ s}$ , ……

步骤 5, 式(3-4-23)等号右边各项中的量都已给定, 则可求得  $H^{n+1}$ 。

步骤 6, 将  $H^{n+1}$  代入式(3-4-25), 则求得  $t^{n+1}$ 。

至此, 我们已求得了经过一个时间步长后的  $H$  及  $t$ , 即  $H^{n+1}$  与  $t^{n+1}$ 。

步骤 7, 将  $H^{n+1}$  改写成  $H^n$ , 将  $t^{n+1}$  改写成  $t^n$ 。也就是, 经过前一个时间步长  $\Delta\tau$  计算得到的  $H$  与  $t$  的值  $H^{n+1}$  与  $t^{n+1}$  作为下一个时间步长  $\Delta\tau$  计算时的初值  $H^n$  与  $t^n$ , 再重复计算步骤 5 与步骤 6, 求得新的  $H^{n+1}$  与  $t^{n+1}$ 。以此类推, 即不断求得  $H$  与  $t$  的新值, 也即  $H$  与  $t$  随时间的变化, 直至  $H^{n+1}$  为零。

### 3.4.3 数值求解代数方程

这里介绍求解代数方程(3-3-19)的数值方法。由于水温  $t$  与水表面水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  的关系不是以解析的形式而是通过相应表格的数据相联系, 方程(3-3-19)的求解就难以用解析的方法。

现分析方程(3-3-19)等号左、右两边所示函数的特点。等号左边是  $q_s$ , 它随温度  $t$  增加而减小, 等号右边是  $\dot{m}_s\gamma$ , 它随温度  $t$  (相应地  $\rho_{v,s}$ ) 增加而增加。若  $t$  取一个很小的值, 例如水的初始温度  $t=t_0$ , 相应得到的  $q_s$  值较大而  $\dot{m}_s\gamma$  值较小,  $q_s > \dot{m}_s\gamma$ 。而后用如下迭代公式:

$$t^{(k+1)} = t^{(k)} + \Delta t \quad (3-4-26)$$

式中,  $\Delta t$  是每迭代一次  $t$  的增加量;  $k$  是迭代的顺序,  $k=1, 2, \dots$ 。利用式(3-4-26)由前一次的  $t^{(k)}$  值得到当前的  $t^{(k+1)}$  值, 相应得到的  $q_s$  值将逐渐变小,  $\dot{m}_s\gamma$  值逐渐变大,  $q_s$  与  $\dot{m}_s\gamma$  之间的差值逐渐缩小。当  $k$  增加至  $k=k^*$  时,  $q_s$  值会小于  $\dot{m}_s\gamma$  值, 则  $t^{(k^*)}$  即为方程(3-3-19)的解。

求得水温  $t$  后, 可由式(3-2-9)及式(3-2-24)求得热流密度  $q_s$  与蒸发率  $\dot{m}_s$ 。相应地, 由式(3-3-20)与式(3-3-21)求得水的质量  $m$  与水面高度  $H$  随时间的变化。

计算结果的准确度与  $\Delta t$  的取值有关, 只要  $\Delta t$  的值取得足够小, 计算结果的准确度就能得到保证。

### 3.5 算例

利用上述数学模型可以预测不同条件下器皿内水的质量(高度)与温度的变化以及水表面热流密度与蒸发率,为此,我们在本节及 3.6 节中讨论七个算例。

本节讨论一个典型算例。先列出算例中需要的已知条件(也即定解条件),这些条件对 3.3 节中介绍的数学模型 1、2 与 3 都是相同的。而后,按三种模型给出主要预测结果。最终,对预测结果进行分析与讨论。

#### 3.5.1 已知条件

已知条件中有的是直接给定的,有的是根据给定的条件通过查表或计算得到的。下面分别予以说明。

##### 1. 给定的已知条件

它们是:环境空气温度  $t_e (=t_{\text{dry}}) = 80^\circ\text{C}$ , 空气的湿球温度  $t_{\text{wet}} = 50^\circ\text{C}$ , 空气流的速度  $u_e = 10 \text{ m/s}$ 。器皿内水池长度  $L = 1 \text{ m}$ , 宽度  $W = 1 \text{ m}$ , 水的初始高度  $H_0 = 5 \text{ mm}$ , 水的初始温度  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ 。

##### 2. 相应地已知条件

它们是在上述给定的已知条件经计算或查表得到的,包括:湿空气的相对湿度  $\varphi = 22.49\%$ , 水蒸气分压  $p_{v,e} = 10.7 \times 10^3 \text{ Pa}$ , 水蒸气密度(绝对湿度)  $\rho_{v,e} = 0.065 \text{ kg/m}^3$  及露点  $t_d = 46.6^\circ\text{C}$ 。上述所列 4 个参数都是空气湿度的一种表述。

用干空气的物理性质替代湿空气的物理性质,这些性质包括:空气的运动粘性系数  $\nu = 2.125 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , 比热容  $c_a = 1.01 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ , 导热系数  $\lambda_a = 3.02 \times 10^{-2} \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$  及普朗特数  $Pr = 0.699$ 。

器皿内水的初始质量  $m_0 = 5 \text{ kg}$ , 水的比热容  $c = 4.19 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ , 密度  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , 导热系数  $\lambda = 0.62 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

##### 3. 计算得到的已知条件

它们是:空气流过水表面的雷诺数  $Re = 4.71 \times 10^5$ , 努塞尔数  $Nu = 404.38$ , 表面传热系数  $h = 12.22 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 以及根据水蒸气对空气的质扩散系数  $D_{va} = 0.26 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  与斯密特数  $Sc = 0.817$ , 计算得到舍伍德数  $Sh = 425.9$  与表面传质系数  $h_m = 1.11 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ 。

#### 3.5.2 预测的主要结果

图 3-18 与图 3-19 显示了三种数学模型预测的水的温度  $t$  及高度  $H$  随时间

变化曲线。在图 3-18 中,模型 1 给出水在器皿底部处及在水表面处的温度  $t_{j=1}(\tau)$  及  $t_{j=JZ}(\tau)$ ,模型 2 给出的是器皿内水池整体温度。从两者对比中可看到,模型 2 的曲线夹在模型 1 两条曲线的中间。这表明,模型 2 提供了水的某种平均温度。模型 1 与模型 2 共同的特点是,温度从初始值出发经历一段过渡阶段后都趋于同一个稳定值。模型 3 是从准稳态过程出发进行分析,直接给出了准稳态时的温度值,如图中虚线水平线所示。在图 3-19 中,模型 1 与模型 2 的预测结果非常接近,在过渡阶段,模型 1 的曲线比模型 2 略低一些。模型 3 则是一条直线,从过程一开始就线性地单调下降。

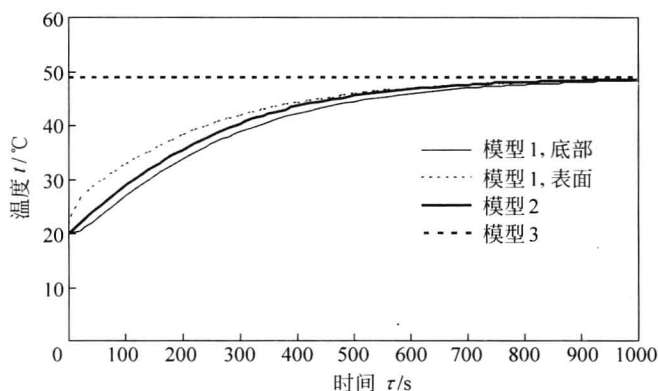


图 3-18 三种数学模型计算的水的温度曲线

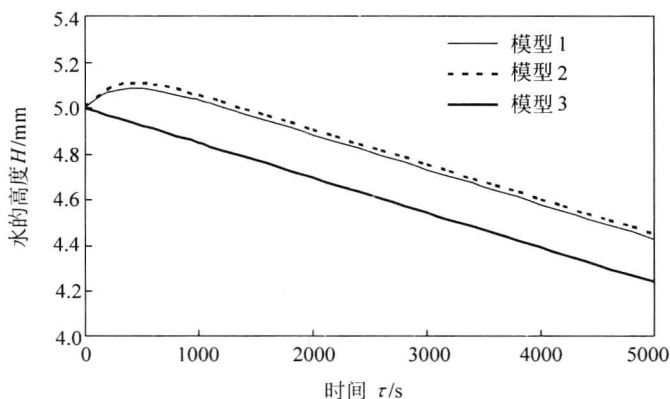


图 3-19 三种数学模型计算的水的高度曲线

表 3-1 给出用三种模型计算水池蒸发全过程所需时间。应该说,三种模型预测结果相互比较接近,尤其是模型 1 与模型 2 更是接近。这说明,在水的高度很小时,用集总参数法可以提供相当准确的结果。为此,在以下分析讨论中,都是采用模型 2 所提供的结果。

表 3-1 三种数学模型在达到准稳态后水温 and 蒸发率以及蒸干时间

模型	水温 $t/^{\circ}\text{C}$	蒸发率 $\dot{m}_s/[\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$	蒸干时间/h
1	48.795	$0.152 \times 10^{-3}$	9.48
2	48.795	$0.152 \times 10^{-3}$	9.53
3	48.80	$0.152 \times 10^{-3}$	9.13

3.5.3 预测结果讨论

图 3-20 与图 3-21 给出了水的质量(高度)、水的温度、水表面热流密度与水的蒸发率 4 个物理量随时间变化的规律。为便于讨论,将温度与热流密度绘于图 3-20,并随同标出空气流的干球温度、湿球温度及露点。同样,将水的质量与蒸发率绘于图 3-21,并随同标出环境空气流及水表面的水蒸气密度。在建立物理模型时已经假定,热空气流引起水的热响应,而水的热响应并不影响空气流,这表现在图 3-20 与图 3-21 中表示环境空气参数的四条水平线。其中图 3-20 中三条水平线用离散点表示,从高到低分别代表着空气流温度  $t_e$ (干球温度  $t_{\text{dry}}$ )、湿球温度

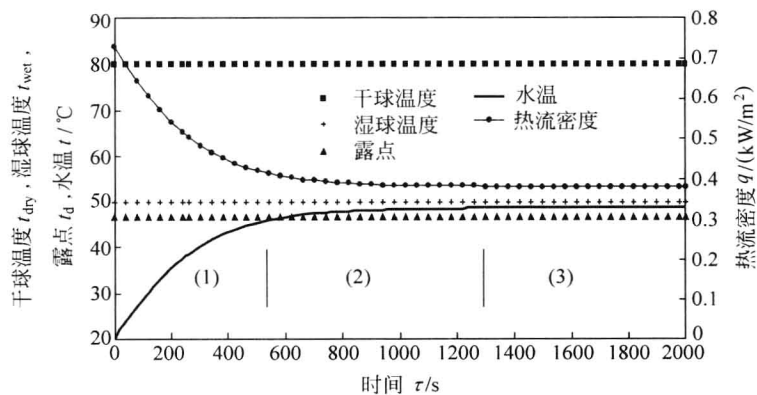


图 3-20 水温与热流密度随时间变化



$t_{\text{wet}}$  及露点  $t_d$ 。对水表面而言,它们都是环境条件,是不随时间变化的。同样,图 3-21 中的一条水平线为空气流中水蒸气密度  $\rho_{v,e}$ 。图 3-20 与图 3-21 中其他 5 条都是随时间变化的曲线,它们反映了器皿内水的热响应。这个热响应可分成三个阶段。

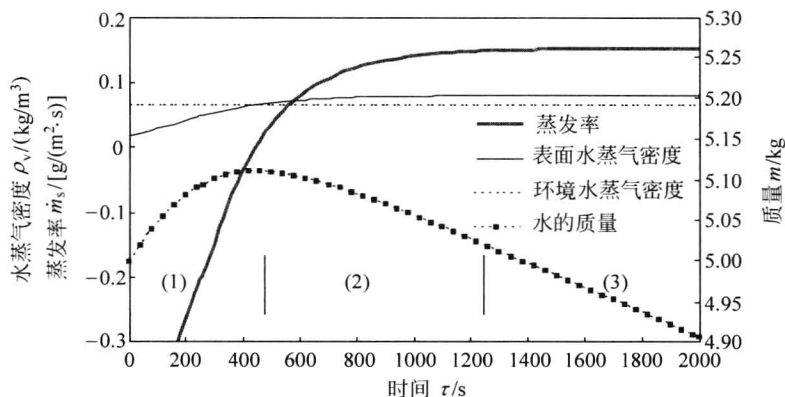


图 3-21 水蒸气密度、蒸发率及水的质量随时间变化

第一阶段(1),就水温  $t$  变化而言,由于水的初始温度( $20^{\circ}\text{C}$ )远低于空气流露点( $46.6^{\circ}\text{C}$ ),则从过程开始,水温由初始温度上升到接近露点温度。就水表面的液相水与水蒸气的相变而言,同样由于水的初始温度低于湿空气露点,水面上出现水蒸气的凝结,且凝结(负蒸发)率由大变小,直至 0,这一阶段的时间从 0 到约 500 s。从图 3-20 中看到,水温上升的规律是,从迅速上升而后逐渐趋缓。这由下面两个因素造成。因素一,空气流对水表面的热流密度  $q_s$  的变化。由于空气流的温度  $t_e$  是不变的,随着水温  $t$  升高,空气流与水间的温度差减小,相应地,热流密度  $q_s$  随水温上升而下降,从初始的  $0.733 \text{ kW/m}^2$  降到  $0.44 \text{ kW/m}^2$ 。因素二,蒸发率  $\dot{m}_s$  的变化。在这一阶段,水表面出现凝结而释放出来质量(蒸发率  $\dot{m}_s$  的绝对值)由大变小,从开始时的  $-0.536 \text{ g/(m}^2 \cdot \text{s)}$  变到 0,相应地,加于水的热量( $\dot{m}_s \gamma$ )也由大而小直至 0。

水蒸气凝结过程是把湿空气中的一部分水蒸气转变成液相水,当然使水的质量有所增加,器皿中的水从初始时的 5 kg 增至 5.116 kg。之所以水表面出现凝结现象,其直接原因是水表面的水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  低于空气流中水蒸气密度  $\rho_{v,e}$ ,这从图 3-21 中可清楚看到。

第二阶段(2),水温从露点温度  $t_d$  ( $46.6^{\circ}\text{C}$ )上升到接近湿球温度  $t_{\text{wet}}$  ( $50^{\circ}\text{C}$ ),其时间从约 500 s 至约 1300 s,在这一阶段,水温继续上升,上升的速率继续减小,这

在图 3-20 中看得很明显。此阶段中蒸发率是正的,由 0 逐渐加大,但增加的速率在不断放慢。这一阶段中,水的质量开始下降,其下降速率逐渐加快。水表面从凝结到蒸发的转变其直接原因是水表面的水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  由小于环境空气流中水蒸气密度  $\rho_{v,e}$ , 即  $\rho_{v,s} < \rho_{v,e}$ , 而转变为  $\rho_{v,s} > \rho_{v,e}$ 。且随着水蒸气密度差值  $(\rho_{v,s} - \rho_{v,e})$  的加大,使水的蒸发率  $\dot{m}_s$  加大,当水温趋于稳定值,相应地,  $\rho_{v,s}$  也趋于稳定值,并使蒸发率  $\dot{m}_s$  趋于稳定值。

第三阶段(3),水温基本保持不变,稳定在湿球温度附近,热流密度也保持不变。相应地,水蒸气密度差  $(\rho_{v,s} - \rho_{v,e})$  与蒸发率  $\dot{m}_s$  都保持不变,水从空气中获得的热量全部用于液相水的蒸发,水的质量线性地下降,处于准稳态阶段,这一阶段可持续到器皿内的水被全部蒸发。

3.6 空气干球温度、湿球温度及流动速度的影响

本节将通过表 3-2 所列的算例来讨论空气干球温度、湿球温度及流动速度对水热响应的影响。表中的算例 1 在 3.5 节中已作介绍,在以下讨论中以此为参考与其他各算例进行比较。

表 3-2 算例中设定的空气干球温度、湿球温度及流动速度

算例	$t_{dry}/^{\circ}\text{C}$	$t_{wet}/^{\circ}\text{C}$	$u_e/(\text{m/s})$	算例	$t_{dry}/^{\circ}\text{C}$	$t_{wet}/^{\circ}\text{C}$	$u_e/(\text{m/s})$
1	80	50	10	5	80	65	10
2	60	50	10	6	80	50	5
3	110	50	10	7	80	50	15
4	80	30	10				

3.6.1 空气干球温度、湿球温度及流动速度对其他定解条件的影响

空气干球温度、湿球温度及流动速度这三个参数对水的热响应而言本身就是定解条件的一部分,这里将分别讨论这三个参数对其他定解条件的影响。

3.6.1.1 干球温度的影响

表 3-3 中所列各参数随干球温度不同而不同,而湿球温度与空气流速度的不同对它们没有影响。这些参数都是干空气的物理性质,如比热容  $c_a$ 、运动粘度  $\nu_a$ 、导热系数  $\lambda_a$ 、普朗特数  $Pr$  及斯密特数  $Sc$ 。

表 3-3 不同干球温度条件下的空气物理性质

算 例	$t_{\text{dry}}/^{\circ}\text{C}$	$c_a/[\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})]$	$\nu_a/(\text{m}^2/\text{s})$	$\lambda_a/[\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})]$	$Pr$	$Sc$
2	60	1.008	$1.92\times 10^{-5}$	0.029	0.702	0.739
1、4、5、6、7	80	1.009	$2.12\times 10^{-5}$	0.03	0.699	0.817
3	110	1.010	$2.50\times 10^{-5}$	0.033	0.693	0.940

### 3.6.1.2 干、湿球温度的影响

表 3-4 中所列各参数既受空气干球温度又受湿球温度的影响,空气流动速度不同对它们没有影响。这些参数是,水蒸气分压  $p_{\text{v,e}}$ 、水蒸气密度  $\rho_{\text{v,e}}$ 、相对湿度  $\varphi$  及露点  $t_{\text{d}}$ ,它们都是空气湿度的表示。

表 3-4 在不同干、湿球温度条件下空气湿度

算 例	$t_{\text{dry}}/^{\circ}\text{C}$	$t_{\text{wet}}/^{\circ}\text{C}$	$p_{\text{v,e}}/\text{MPa}$	$\rho_{\text{v,e}}/(\text{kg}/\text{m}^3)$	$\varphi/\%$	$t_{\text{d}}/^{\circ}\text{C}$
2	60	50	0.0118	0.077	59.07	48.86
1、6、7	80	50	0.0107	0.065	22.49	46.60
3	110	50	0.009	0.051	9.00	43.21
4	80	30	0.0012	0.007	2.45	10.00
5	80	65	0.0249	0.153	52.44	64.36

表 3-4 中数据显示,当干球温度  $t_{\text{dry}}$  相同,湿球温度  $t_{\text{wet}}$  越高,则空气湿度越大,这一点容易理解。而当湿球温度  $t_{\text{wet}}$  相同( $50^{\circ}\text{C}$ ),干球温度  $t_{\text{dry}}$  越高则空气的湿度越低,不仅相对湿度低,绝对湿度也低,相应地,水蒸气分压也低。其原因可以从分析式(3-1-17)得到解释。

$$p_{\text{v},1} = \frac{\frac{p}{0.622h_{\text{sv},1}}\left(c_{\text{a},2}t_{\text{wet}} + \frac{0.622p_{\text{sv},2}}{p - p_{\text{sv},2}}h_{\text{sv},2} - c_{\text{a},1}t_{\text{dry}}\right)}{1 + \frac{1}{0.622h_{\text{sv},1}}\left(c_{\text{a},2}t_{\text{wet}} + \frac{0.622p_{\text{sv},2}}{p - p_{\text{sv},2}}h_{\text{sv},2} - c_{\text{a},1}t_{\text{dry}}\right)} \quad (3-1-17)$$

式(3-1-17)中,干球温度  $t_{\text{dry}}$  对环境水蒸气分压  $p_{\text{v},1}$  (即表 3-4 中的  $p_{\text{v,e}}$ ) 的影响反映在两个因子上: 一个是  $(-c_{\text{a},1}t_{\text{dry}})$ ,  $t_{\text{dry}}$  的升高导致  $p_{\text{v},1}$  的下降; 另一个是  $(1/h_{\text{sv},1})$ ,  $t_{\text{dry}}$  的升高导致  $h_{\text{sv},1}$  的升高, 同样导致  $p_{\text{v},1}$  的下降。

从表 3-4 中所列数据看到,水蒸气分压  $p_{\text{v,e}}$ 、水蒸气密度(绝对湿度) $\rho_{\text{v,e}}$ 与

露点  $t_d$ ，它们三者数值从大到小的排列顺序是相同的，而相对湿度  $\varphi$  的排列顺序与上述三者不相同。

3.6.1.3 空气干球温度和空气流动速度的影响

表 3-5 中所列参数既受空气干球温度又受空气流动速度的影响，湿球温度对它们没有影响，这些参数都是反映传热与传质的特征。

表 3-5 空气干球温度与流动速度对  $Re, Nu, h, Sh$  及  $h_m$  的影响

算例	$t_{dry}/^{\circ}\text{C}$	$u_e/(\text{m/s})$	$Re$	$Nu$	$h/[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$	$Sh$	$h_m/(\text{m/s})$
2	60	10	520 567	504.77	14.51	513.35	0.0133
1、4、5	80	10	470 601	404.38	12.22	425.91	0.0111
3	110	10	407 409	375.19	12.20	415.78	0.0108
6	80	5	235 300	285.94	8.64	301.16	0.0078
7	80	15	705 902	843.23	25.49	888.12	0.0231

3.6.2 空气干球温度对水的热响应的影响

下面我们分别就空气流干球温度  $t_{dry}$  对器皿内水的温度  $t$ 、空气流对水的热流密度  $q_s$ 、液相水的蒸发率  $\dot{m}_s$  的影响进行分析与讨论。

3.6.2.1 干球温度对水温变化的影响

图 3-22 中有四条用离散点表示的水平线，其中三条分别代表干球温度  $t_{dry}$  为  $60^{\circ}\text{C}$ （干球温度 1）、 $80^{\circ}\text{C}$ （干球温度 2）与  $110^{\circ}\text{C}$ （干球温度 3），另一条为湿球温度  $t_{wet}=50^{\circ}\text{C}$ 。图 3-22 显示，干球温度 1、2 与 3 对应于水温 1、2 与 3。这三条水温的变化曲线相互很接近，它们经历着几乎相同的三个阶段，干球温度低的（干球温度 1）空气流所对应的水温（水温 1）还稍高些。这一现象与人们的“当空气流温度高时，水温的上升速度应该快，水的温度应该高的”直觉认识相矛盾。为什么不同温度的空气流引起的水温度变化几乎相同呢？这需从不同于干球温度相同湿球温度条件下水表面热流密度  $q_s$  与蒸发率  $\dot{m}_s$  两方面的行为去分析。

3.6.2.2 干球温度对热流密度的影响

从图 3-22 中看到，干球温度 1、2 与 3 条件下的热流密度 1、2 与 3 的  $q_s$  的曲线

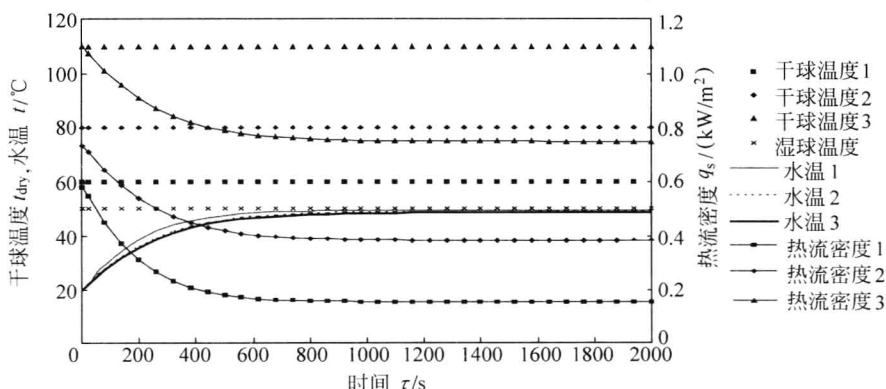


图 3-22 不同干球温度条件下水温与热流密度随时间变化

其走向大致相同,几乎是三条相互平行的曲线,空气温度  $t_{\text{dry}}$  越高,空气与水表面的温度差 ( $t_{\text{dry}} - t$ ) 就越大,相应地,热流密度  $q_s$  也就越大。在水温度变化的三个阶段,这一特点始终如此。对于空气温度高热流密度大这一结论是十分容易理解的。但是,为什么从空气流到达水表面的热流密度  $q_s$  大的并不造成水温上升速度快、水温高,甚至出现相反的情形?

### 3.6.2.3 干球温度对蒸发率的影响

图 3-23 中显示了干球温度 1、2 与 3 条件下相应地三条蒸发率曲线 1、2 与 3。从图 3-23 中看到,当空气干球温度不同时,蒸发率的曲线是不同的,但它们的走向大致相同,是三条几乎相互平行的曲线。我们从式(3-2-24)出发对蒸发率进行分析。影响蒸发率  $\dot{m}_s$  的三个参数为表面传质系数  $h_m$ 、表面水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  与环境水蒸气密度  $\rho_{v,e}$ 。干球温度的不同对对流传质系数  $h_m$  的影响甚微,这可从表 3-5 所列数据看到,干球温度的不同对水表面水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  的影响也很小,这由图 3-24 中看到,对应不同干球温度的三条水表面水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  的曲线彼此很接近,这是因为水表面的温度在不同干球温度条件下彼此很接近的缘故。式(3-2-24)中只有  $\rho_{v,e}$  与干球温度密切相关,如表 3-4 所示,在图 3-24 中用离散点表示的三条水平线分别代表环境 1 ( $t_{\text{dry}} = 60^\circ\text{C}$ ,  $\rho_{v,e} = 0.077 \text{ kg/m}^3$ )、环境 2 ( $t_{\text{dry}} = 80^\circ\text{C}$ ,  $\rho_{v,e} = 0.065 \text{ kg/m}^3$ ) 与环境 3 ( $t_{\text{dry}} = 110^\circ\text{C}$ ,  $\rho_{v,e} = 0.051 \text{ kg/m}^3$ )。差值 ( $\rho_{v,s} - \rho_{v,e}$ ) 是推动蒸发(或凝结)的驱动力。在  $\rho_{v,s}$  大致相同条件下,  $\rho_{v,e}$  就成为影响  $\dot{m}_s$  的决定性因素。

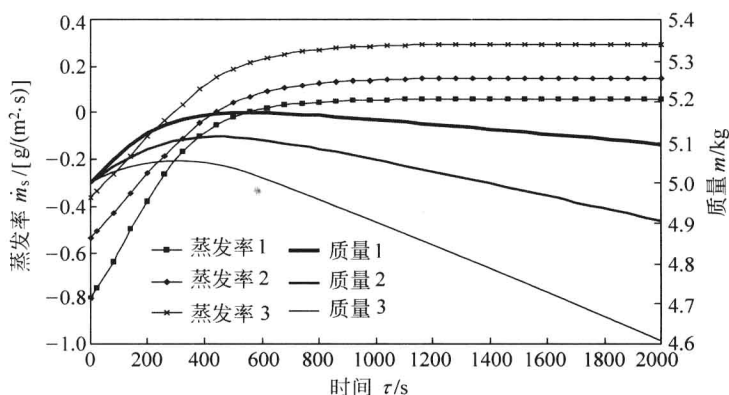


图 3-23 不同干球温度条件下水的蒸发率及水的质量随时间变化

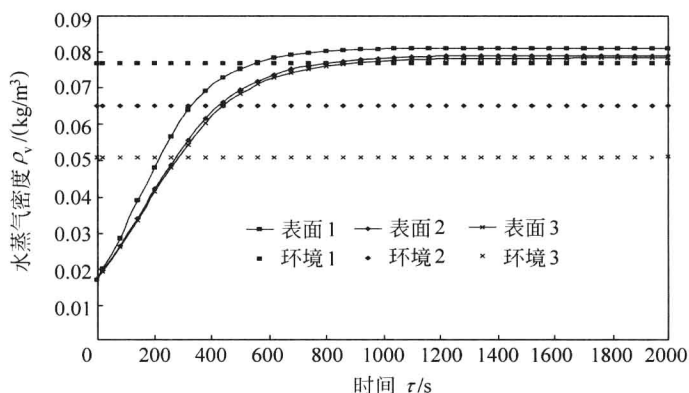


图 3-24 不同干球温度条件下水表面水蒸气密度随时间变化

在过程第一阶段,即水温从初始值升至露点温度。期间, $\rho_{v,s} < \rho_{v,e}$ ,水表面出现水蒸气凝结,若 $t_{dry}$ 高,差值 $(\rho_{v,e} - \rho_{v,s})$ 小,凝结率就小。由于凝结过程是一个放热过程,这样,凝结率小,相应释放给水的热量就少。总之,当干球温度高时,尽管水表面直接从空气中通过对流传热获得的热量多了,而从凝结过程获得的热量却少了。二者综合,致使不同干球温度条件下,水从空气中实际获得的热量几乎相同,造成水的升温速度几乎相同。甚之,对于干球温度低的空气,由于其湿度高,凝结率高,水获得的热量多,使其温度升得快升得高,这从图 3-22 中温度曲线(水温 1)可看到。

同样,在第二阶段,水表面由凝结转为蒸发,水表面的水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  大于空气中水蒸气密度  $\rho_{v,e}$ ,  $(\rho_{v,s} - \rho_{v,e}) > 0$ 。由于空气干球温度高,水蒸气密度低这一特点,在干球温度比较高时,差值  $(\rho_{v,s} - \rho_{v,e})$  也比较大。相应地,蒸发率比较大,使液相水蒸发成蒸气所消耗的热量比较大。这样,在高干球温度条件下,尽管水表面直接从空气中通过对流传热获得的热量比较多,但同时用于水的蒸发所消耗的热量也比较多,二者综合,使水从空气中实际获得的热量并不因为干球温度高而获得更多。总之,对应于不同干球温度,水温的上升速度几乎相同。

在第三阶段,水温维持在湿球温度附近,保持不变,热流密度  $q_s$  与蒸发率  $\dot{m}_s$  也都保持不变,且高的  $q_s$  对应于高的  $\dot{m}_s$ ,水表面从空气中直接获得的热量正好抵消使液相水蒸发成水蒸气所需的热量,这样,水从空气中实际获得的热量为 0。

关于干球温度不同对器皿内水质量变化的影响从图 3-23 中可清楚看到,由于在  $60^\circ\text{C}$ 、 $80^\circ\text{C}$  与  $110^\circ\text{C}$  这三个干球温度条件下,器皿内的水都是先经历凝结而后又蒸发的过程。也即,水的质量先是因凝结而增加,而后又因蒸发而逐渐减少。在湿球温度相同的前提下,干球温度越高,相应地环境湿空气湿度越低,则整个过程中,凝结量少,蒸发量大。相反,干球温度越低,则湿度高,凝结量大,蒸发量少。从图 3-23 中看到,尽管表示质量变化的三条曲线都是经历了先上升到达极点而后又下降的过程,对应于  $60^\circ\text{C}$ 、 $80^\circ\text{C}$  与  $110^\circ\text{C}$  三种干球温度,其极值点由高至低,分别为  $5.173\text{ kg}$ 、 $5.113\text{ kg}$  及  $5.056\text{ kg}$ ,且到达极值点的时间也不尽相同,分别为  $560\text{ s}$ 、 $440\text{ s}$  及  $320\text{ s}$ 。在越过极值点之后,分别以不同的斜率下降,干球温度越高,下降得越快。

### 3.6.3 空气湿球温度对水的热响应的影响

空气湿球温度对已知条件的影响在表 3-4 中已经列出。它直接影响空气的湿度(空气中水蒸气分压  $p_{v,e}$ 、水蒸气密度  $\rho_{v,e}$ 、相对湿度  $\varphi$  及露点温度  $t_d$  等)。当然,相应地也影响器皿内水的温度  $t$ 、空气对水表面的热流密度  $q_s$ 、水的蒸发率  $\dot{m}_s$ 、水的质量  $m$  等这些参数的变化过程,下面分别予以讨论。

#### 3.6.3.1 湿球温度对水温度变化过程的影响

图 3-25 显示了湿球温度不同对水温变化过程的影响。湿球温度 1、2 与 3 分别为  $30^\circ\text{C}$ 、 $50^\circ\text{C}$  与  $65^\circ\text{C}$ ,用离散点水平线表示,它们对应图中的三条水温变化曲线水温 1、2 与 3 用实线表示。对于湿球温度为  $50^\circ\text{C}$  及  $65^\circ\text{C}$ ,它们相应地露点温度  $t_d$

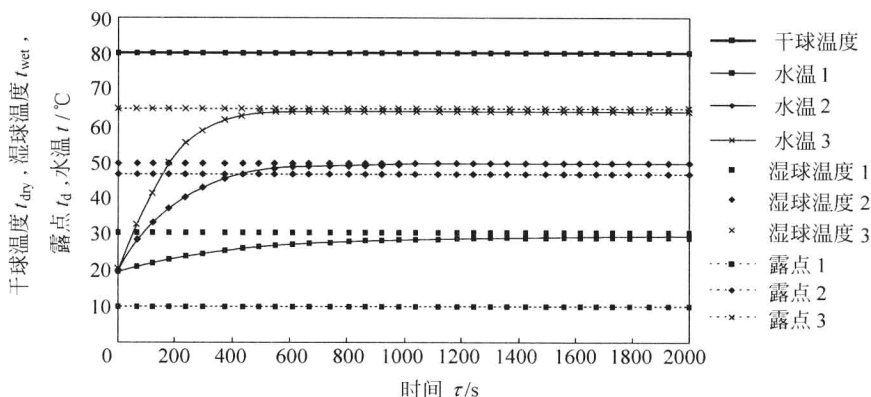


图 3-25 不同湿球温度条件下水温随时间变化

分别为  $46.6^{\circ}\text{C}$  与  $64.4^{\circ}\text{C}$ ，都高于水的初始温度  $20^{\circ}\text{C}$ 。这样，水温变化的曲线都经历了如前所述的三个阶段，即迅速上升阶段（水温由初始温度到达露点温度）、缓慢上升阶段（由露点温度到接近湿球温度）、保持水温不变阶段（水温维持在湿球温度附近）。由于湿球温度为  $65^{\circ}\text{C}$  的空气其露点温度为  $64.4^{\circ}\text{C}$ ，两者相差仅  $0.6^{\circ}\text{C}$ ，所以，水温变化的第二阶段经历的时间很短，在图中就不很明显了。而对湿球温度为  $30^{\circ}\text{C}$  的空气流，其露点温度为  $10^{\circ}\text{C}$ ，则水的初始温度高于露点温度，水在受热过程开始就没有第一阶段（凝结）而直接进入第二阶段（蒸发），这样，水温一开始就是缓慢上升，这在图 3-25 中可清楚地看到。

纵观三条水温变化曲线，它们的走向都是由低到高，且趋向于一个稳定值。不同的是，湿球温度高，水温上升速率快，且平衡的稳定值也高。这表示，湿球温度高，水实际获得的热量就多。为什么会有这样的特征呢？这还要结合湿球温度  $t_{\text{wet}}$  对热流密度  $q_s$  及水的蒸发率  $\dot{m}_s$  的影响进行分析讨论。

### 3.6.3.2 湿球温度对热流密度的影响

图 3-26 显示了湿球温度不同对热流密度  $q_s$  及蒸发率  $\dot{m}_s$  变化过程的影响。热流密度  $q_s$  的 1、2 与 3 分别对应于湿球温度 1、2 与 3 的湿空气环境， $q_s$  用实线表示。在加热过程开始时，不管湿球温度高低，由于空气与水的温度差相同，则热流密度相同，即三条  $q_s$  曲线的出发点是相同的。随着水温升高，空气与水的温差减小， $q_s$  下降，当水温升至趋于稳定值时， $q_s$  也趋于某稳定值。虽然三条曲线的走向大致相同，但高的湿球温度，由于对应的水温上升速度快，水温比较高，空气与水的温差



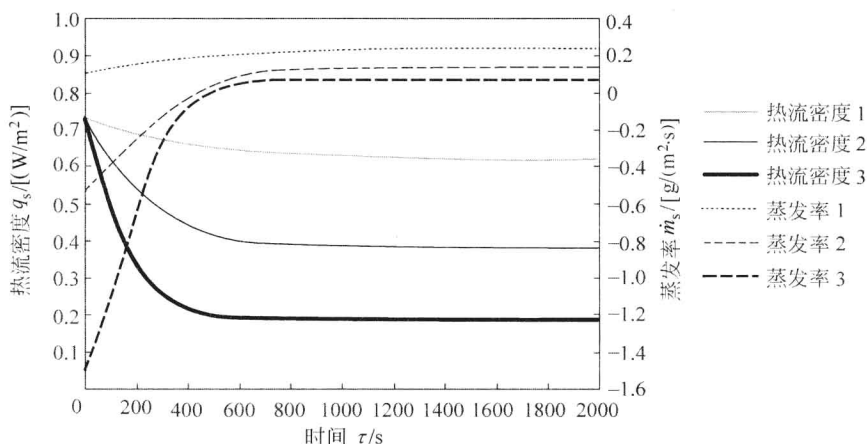


图 3-26 不同湿球温度条件下热流密度与蒸发率随时间变化

就比较小,  $q_s$  也就比较小, 正如图中所表明的, 高湿球温度对应低的热流密度。

### 3.6.3.3 湿球温度对蒸发率的影响

从图 3-26 中三条用虚线表示的蒸发率曲线看到, 加热过程开始时, 由于水温相同, 水表面水蒸气密度相同, 为初始水温对应下的饱和水蒸气密度,  $\rho_{v,s} = 0.017 \text{ kg/m}^3$ 。对应于不同湿球温度, 环境的水蒸气密度不同, 则各自的蒸发率就不同。  $t_{\text{wet}}$  为  $30^\circ\text{C}$ , 初始水温高于露点 1 ( $10^\circ\text{C}$ ), 水表面的水蒸气密度大于环境 1 水蒸气密度 ( $0.007 \text{ kg/m}^3$ ), 则水表面有液相水的蒸发,  $\dot{m}_s$  为  $+0.11 \text{ g/(m}^2 \cdot \text{s)}$ 。而当初始水温低于露点 2 ( $46.6^\circ\text{C}$ ) 与露点 3 ( $64.4^\circ\text{C}$ ) 条件下, 即当水表面的水蒸气密度低于环境 2 与环境 3 的水蒸气密度 ( $0.077 \text{ kg/m}^3$  与  $0.153 \text{ kg/m}^3$ ) 时, 水表面处有水蒸气凝结。对应于  $t_{\text{wet}}$  为  $50^\circ\text{C}$ ,  $\dot{m}_s$  为  $-0.54 \text{ g/(m}^2 \cdot \text{s)}$ , 对应于  $t_{\text{wet}}$  为  $65^\circ\text{C}$ ,  $\dot{m}_s$  为  $-1.5 \text{ g/(m}^2 \cdot \text{s)}$ 。随着水温不断上升, 水表面的水蒸气密度不断提高, 则蒸发率  $\dot{m}_s$  不断增加 (包括有凝结转为蒸发), 且逐渐趋于各自的稳定值。低的空气湿球温度, 即对应低的环境水蒸气密度, 其始终具有高的蒸发率, 最终的稳定值也高。

图 3-27 中有三条用离散点表示的水平线, 它们分别代表湿球温度  $t_{\text{wet}}$  为  $30^\circ\text{C}$ 、 $50^\circ\text{C}$  与  $65^\circ\text{C}$  对应的环境湿空气水蒸气密度, 由表 3-4 可知, 分别为  $0.007 \text{ kg/m}^3$ 、 $0.065 \text{ kg/m}^3$  与  $0.153 \text{ kg/m}^3$ , 图 3-27 中标出环境 1、2 与 3。图中同时显示了不同湿球温度条件下, 水表面水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  的变化过程, 三条  $\rho_{v,s}$  变化曲线与

图 3-25 中三条水温曲线相一致, 因为  $\rho_{v,s}$  唯一取决于水温, 图 3-27 中标出表面 1、2 与 3。水表面水蒸气密度  $\rho_{v,s}$  与环境水蒸气密度  $\rho_{v,e}$  的差值  $(\rho_{v,s} - \rho_{v,e})$  决定着蒸发率  $\dot{m}_s$  的变化规律。

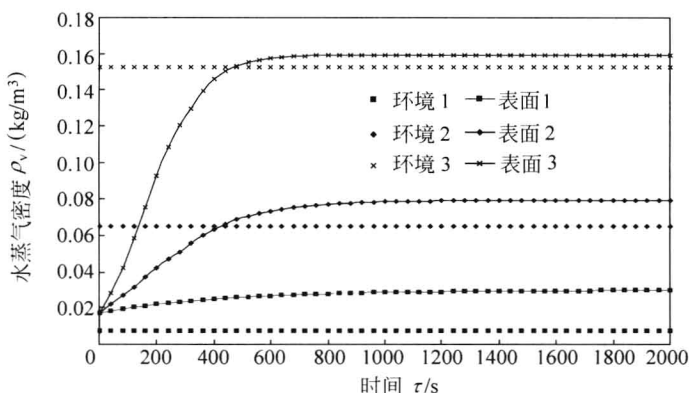


图 3-27 不同湿球温度条件下水表面水蒸气密度随时间变化

纵观热流密度  $q_s$  与蒸发率  $\dot{m}_s$  变化的特点, 我们看到, 过程开始时, 对于不同的湿球温度  $t_{wet}$ , 热流密度  $q_s$  是相同的, 蒸发率  $\dot{m}_s$  不相同,  $t_{wet}$  高的,  $\dot{m}_s$  小 (绝对值大), 即凝结量大, 相应地释放给水的热量也多, 致使水温上升得快。换一个角度讲, 过程开始时, 处在不同  $t_{wet}$  环境下的水直接从空气中获得的热量尽管相同, 但由于凝结率不同, 从凝结中获得的热量就不同, 致使水实际获得的热量不同, 水的升温速度也就不同。对于  $t_{wet}$  为  $30^\circ\text{C}$  的情形, 过程一开始, 水就处于蒸发状态, 它从空气中直接获得的能量其中一部分还要用于水的蒸发, 这样实际获得的热量就少了, 水的升温速率一开始就很慢。

关于湿球温度  $t_{wet}$  对水质量  $m$  变化的影响完全取决于相应地  $\dot{m}_s$  的变化过程。图 3-28 中质量 1、2 与 3 的三条曲线对应着湿球温度 1、2 与 3。如果初始水温低于露点温度, 如图 3-25 中露点 2 与露点 3, 则加热过程开始时, 水表面有水蒸气凝结, 水质量开始增加, 直到水温达到露点温度, 水的质量达到最大值, 之后, 水表面由凝结转为蒸发, 水质量开始减少。若  $t_{wet}$  高, 对应于质量 3, 则凝结率大, 水质量增长得快, 在达到最大值之后, 下降得慢。若  $t_{wet}$  低, 对应于质量 2, 则凝结率小, 水质量增长得慢, 在达到最大值之后, 下降得快。如果初始水温高于露点温度, 对应于质量 1, 加热过程从开始起水表面就发生蒸发, 水质量一开始就下降, 且下降速率比较快。图 3-28 中三条曲线清楚地反映了这一情形。

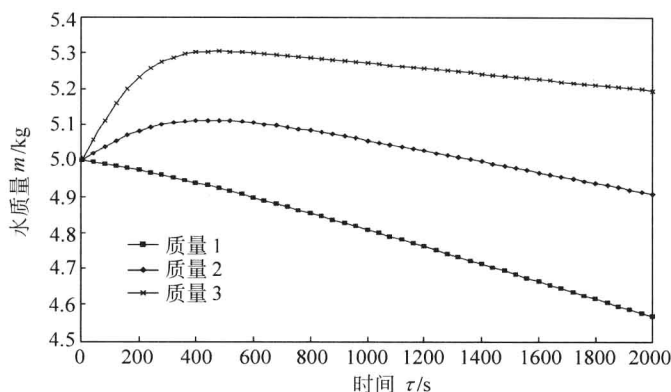


图 3-28 不同湿球温度条件下水的质量随时间变化

### 3.6.4 空气流动速度对水的热响应的影响

空气流速度  $u_e$  对已知条件的影响在表 3-5 中可看到,它只影响雷诺数( $Re$ )的值。而  $Re$  数又直接影响表面传热系数  $h$  及表面传质系数  $h_m$ 。这样,  $u_e$  当然地影响器皿内水的温度  $t$ 、空气流对水表面的热流密度  $q_s$ 、水的蒸发率  $\dot{m}_s$ 、水的质量  $m$  等这些参数的变化过程。这里分析当空气干球温度  $t_{dry}$  为  $80^\circ\text{C}$ ,湿球温度  $t_{wet}$  为  $50^\circ\text{C}$ ,空气流速度  $u_e$  分别为  $5\text{ m/s}$ 、 $10\text{ m/s}$  与  $15\text{ m/s}$  时,对上述水温等诸参数变化过程的影响。

图 3-29 显示了空气流速度  $u_e$  不同对水温变化过程的影响,图中水温 1、2 与 3 三条温度曲线分别对应于  $u_e$  为  $5\text{ m/s}$ 、 $10\text{ m/s}$  与  $15\text{ m/s}$  三种情形。由图看到,当  $u_e=5\text{ m/s}$ ,水温上升得慢,达到稳定值所需时间约为  $1700\text{ s}$ ;当  $u_e=15\text{ m/s}$  时,水温上升得快,到达稳定值所需时间短,约为  $540\text{ s}$ 。尽管三条曲线到达稳定值所需时间不同,但最终达到稳定的值是相同的,都在湿球温度附近。

图 3-29 还显示了空气流速度  $u_e$  不同对热流密度  $q_s$  影响,图中热流密度 1、2 与 3 三条曲线分别对应于  $u_e$  为  $5\text{ m/s}$ 、 $10\text{ m/s}$  与  $15\text{ m/s}$  三种情形。由图可见,从加热一开始,由于  $u_e$  不同,  $q_s$  的初值就不同。  $u_e$  大,热流密度  $q_s$  就大,这是因为,  $u_e$  大,即  $Re$  数大,即表面传热系数  $h$  的数值大所致。就三条  $q_s$  曲线随时间变化而言,当  $u_e$  大时,  $q_s$  大,水的升温速度快,使空气流与水的温度差下降得也快,导致  $q_s$  值下降得快,达到稳定值所需时间就短。相反,  $u_e$  小,水的升温速度慢,  $q_s$  达到稳定值所需时间长。

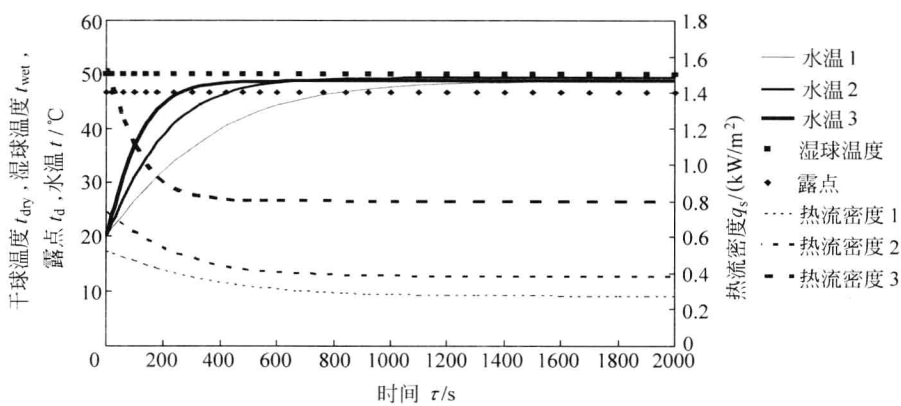


图 3-29 不同空气流速条件下温度随时间变化

图 3-30 显示了空气流速度  $u_e$  不同对蒸发率  $\dot{m}_s$  的影响,图中蒸发率 1、2 与 3 三条曲线分别对应于  $u_e$  为 5 m/s、10 m/s 与 15 m/s 三种情形。先看蒸发率的三条曲线,由于水的初始温度低于露点温度,因此都有一段凝结过程。过程开始时,若  $u_e$  大(对应蒸发率 3),则  $Re$  大,表面传质系数  $h_m$  就大,相应地,凝结率就大( $\dot{m}_s$  的绝对值大),且凝结率的变化率也大(即  $\dot{m}_s$  曲线的斜率大)。在较短时间内就从凝结转为蒸发,且蒸发率的变化率也大,最终达到稳定的  $\dot{m}_s$  值也大,到达稳定值所需时间短。若  $u_e$  小(对应蒸发率 1),在较长时间后才从凝结转为蒸发,且蒸发率的变化率也小,最终达到稳定的  $\dot{m}_s$  值也小,到达稳定值所需时间长。

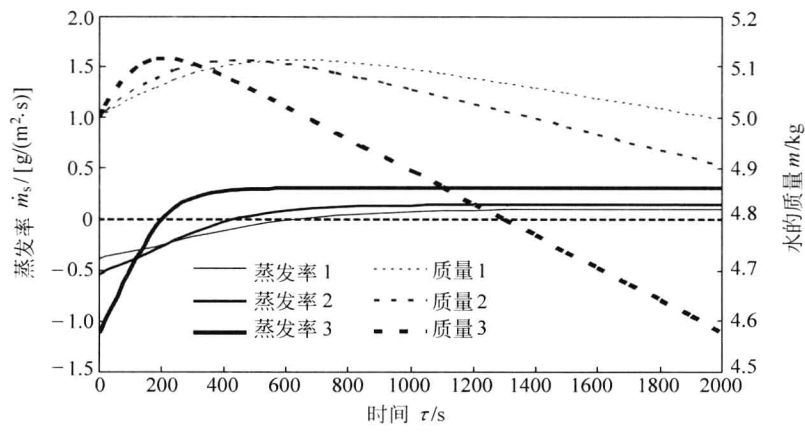


图 3-30 不同空气流速条件下热流密度与蒸发率随时间的变化

图 3-30 还显示了空气流速度  $u_e$  对器皿内水质量变化的影响。由于过程开始时都有一段凝结过程,致使水的质量有所增加。若  $u_e$  大(对应质量 3),凝结率大,且其变化率也大,则水质量增加得快,达到质量最大值所需时间也短。相反, $u_e$  小(对应质量 1),凝结率小且变化缓慢,到达最大值所需时间就长。三条曲线各自达到最大值后就逐渐下降,且下降率逐渐加大,趋于一个稳定的下降速度(曲线的斜率)。总之,在水被蒸发过程中, $u_e$  大,蒸发得快,水质量下降得也快。从图中我们看到一个很有意义的事实,即三条曲线虽然它们到达最大值所需时间不同,但是这个最大值的大小几乎相同。

### 3.6.5 算例汇总

表 3-6 是针对表 3-2 所列的七个算例条件算得的在水的热响应达到准稳态时水温  $t$ 、热流密度  $q_s$ 、蒸发率  $\dot{m}_s$  的值以及将水全部蒸发完所需时间。它们是按数学模型 2,求解常微分方程数值解的结果。从这个简要的汇总中我们看到:

(1) 在过程达到准稳态时,水的温度都趋近于环境湿空气的湿球温度。这是因为,准稳态条件下,水表面在同一时间段内从环境空气获得的热量等于由于水蒸发而散发给环境的热量。这也可以理解为,水表面处在一个绝热体系内,经历着一个绝热冷却过程,如式(3-1-16)所示。其等号左边是处于未饱和的环境湿空气,其等号右边是饱和湿空气,对应的饱和温度即为湿球温度。

(2) 环境空气的干球温度、湿球温度与空气流动速度是影响水蒸发过程的三个主要因素。若按蒸发时间由小到大的顺序进行排列,可得:算例 7<算例 3<算例 4<算例 1<算例 6<算例 5<算例 2。从这个排列中不难看到这三个因素的影响。

表 3-6 七个算例的结果

算例	干球温度 $t_{\text{dry}}/^\circ\text{C}$	湿球温度 $t_{\text{wet}}/^\circ\text{C}$	空气流速度 $u_e/(\text{m/s})$	水温 $t/^\circ\text{C}$	蒸发率 $\dot{m}_s/[\text{g}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$	热流密度 $q_s/(\text{W}/\text{m}^2)$	蒸发时间/h
1	80	50	10	48.80	0.152	381.5	9.53
2	60	50	10	49.45	0.063	153.1	23.77
3	110	50	10	48.55	0.300	749.4	4.85
4	80	30	10	29.48	0.246	618.4	5.71
5	80	65	10	64.33	0.081	191.5	19.48
6	80	50	5	48.80	0.108	269.7	13.47
7	80	50	15	48.80	0.317	795.0	4.57

## 习 题

- 3-1 3.1 节中介绍的关于湿空气中水分(水蒸气)含量的各种表述与 1.1 节中关于多孔材料中水分(液相水)含量的各种表述有何联系?有何区别?请逐一对比。
- 3-2 当高温湿空气流掠过静止水面时,在水面上建立起速度边界层、温度边界层及水蒸气密度边界层。在怎样条件下这三种边界层完全重叠。
- 3-3 在图 3-1 所示器皿底部放置一块金属板,如图 3-31 所示。对照 3.3.2 节所述,建立本题中水温及水面高度变化的控制方程与定解条件。(提示:水与金属板之间只有导热,不计对流,金属板的侧面与下表面均为绝热面。)
- 3-4 图 3-32 是 3.5 节算例图 3-18 中节录下来的一条温度变化曲线。如果算例的各项条件均不变,只是在图 3-1 所示器皿内水表面上加盖一层透明的玻璃,池内水的温度响应曲线将是怎样的?将它定性地画在图 3-32 中,与原图中曲线进行对比,并说明理由。

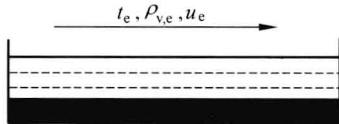


图 3-31

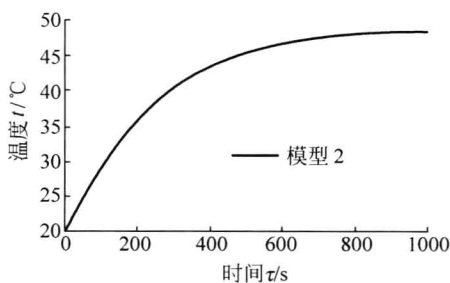


图 3-32

- 3-5 本章式(3-3-10)、式(3-3-11)与式(3-3-12)都是表述水面蒸发移动边界的条件,为什么说它们三式是等价的,试分别说明它们的物理含义。
- 3-6 游泳池水面长 25 m,宽 12 m,池内水与水面上空气均为 25°C,池面上空气风速为 2 m/s,试估算该游泳池每天水的蒸发量。
- 3-7 图 3-14、图 3-15 与图 3-16 表示了液相水不断蒸发液面高度不断下降过程区域内及边界上单元与节点的变化。如果出现水蒸气不断凝结液面高度不断上升,区域内及边界上单元与节点将怎样变化?相应地计算公式应作怎样的

修正?

3-8 试用控制容积法推导式(3-4-11)、式(3-4-17)与式(3-4-19)。

3-9 图 3-33 所示为一金属球被一层厚度均匀的水膜所包围,当热空气绕流这个金属球时,水膜将蒸发。试用集总参数法建立金属球温升及水膜蒸发的数学模型,即写出控制方程及定解条件。



图 3-33

3-10 验算表 3-4 中的数据。即在已知干球温度  $t_{\text{dry}}$  与湿球温度  $t_{\text{wet}}$  条件下验算水蒸气压力  $p_{v,e}$ 、水蒸气密度  $\rho_{v,e}$ 、相对湿度  $\varphi$  及露点  $t_d$ , 并补充含湿量  $\omega$  的数据。

## 参 考 文 献

- [1] 沈维道,童均耕主编.工程热力学[M].第4版.北京:高等教育出版社,2007.
- [2] 严家碌,王永青编.工程热力学[M].第4版.北京:高等教育出版社,2006.
- [3] 刘桂玉,刘咸定,钱立伦,马元编.工程热力学[M].北京:高等教育出版社,1989.
- [4] 余延顺,李先庭,石文星,田长青.一种高温空气湿度测量的方法[J].暖通调,2005,35(11):122-127.
- [5] SCHLICHTING H G. Boundary-layer Theory[M]. 8th ed. Springer,2000.
- [6] PRANDTL L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. (Krazer A, ed.) Verhandlungen des dritten, internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg von 8. bis 13. August 1904. Leipzig: B. G. Teubner,1905. p. 484-491.
- [7] POHLHAUSEN E. Heat exchange between solid bodies and fluid with small friction and low heat conductivity[M]. Math. Mech.,1921,1(2):115-121.
- [8] 郭永怀.边界层理论讲义[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2008.
- [9] 赵镇南.传热学[M],第2版.北京:高等教育出版社,2008.
- [10] INCROPERA F P, DEWITT D P. Fundamentals of heat and mass transfer[M]. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons,1990.
- [11] 杨世铭,陶文铨编.传热学[M].第2版.北京:高等教育出版社,2006.
- [12] WAKER W H, LEWIS W K, MCADAM H. Principles of chemical engineering[M].



New York: McGraw-Hill, 1923.

- [13] 奥齐西克, M N. 热传导[M]. 俞昌铭主译. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [14] STEFAN J. Ann. Phys. Chemie(Wiedemannsche Annalen). 1891(42): 269-286.
- [15] 俞昌铭. 热传导及其数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982.
- [16] 李荣华. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [17] 张诚坚. 计算方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.



## 第 4 章

## Chapter

# 固气多孔材料加热及渗流

前两章讨论了对固体材料与静止水的加热,加热对象都是单一连续均匀物质。本章起将讨论多孔材料,加热对象不再是单一连续均匀物质。这一章讨论含气多孔材料,或称固气多孔材料,加热对象是固气共存的混合物体,如图 4-1 所示。

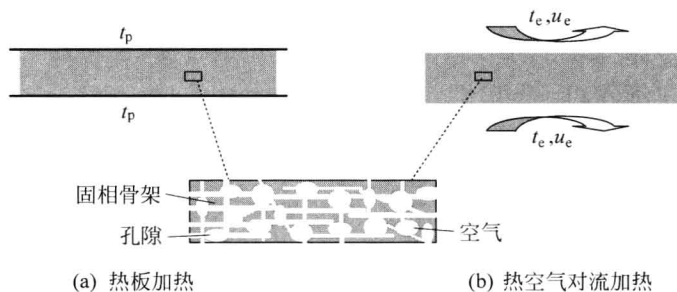


图 4-1 固气多孔材料平板加热

固气多孔材料是多孔材料大家庭中重要一员。例如,用于隔热与防振的泡沫塑料、泡沫铝等粉末冶金材料、加气混凝土与泡沫砖、绝干木材等都可视为固气多孔材料。这里的气体大都是单一物质,常指空气。发生在固气多孔材料内的传热传质过程视孔隙结构不同有较大差异。

本章先介绍反映多孔材料内渗流基本规律的达西定律及渗透率;推导描述固气多孔材料内温度分布,气相速度及密度分布的质量、动量与能量守恒方程以及气体状态方程。随后,由易及繁,分别讨论如下几种情形:封闭型孔隙结构固气多孔材料平板传热,引入等效导热系数使问题简化为只求一个因变量温度的变化  $t(z, \tau)$ ;连通型孔隙结构固气多孔材料内一维等温稳态渗流,空气速度  $u$  为常数,只求一个因变量空气压力的分布  $p(x)$ ;一维等温非稳态渗流,求空气速度  $u(x, \tau)$ 、压力  $p(x, \tau)$  与密度  $\rho_a(x, \tau)$  的变化;二维等温非稳态渗流,求空气速度  $u(x, z, \tau)$  和  $w(x, z, \tau)$ 、压力  $p(x, z, \tau)$  与密度  $\rho_a(x, z, \tau)$  的变化;在热板加热(第一类边界条件)

或热空气流加热(第三类边界条件)条件下固气多孔材料内传热传质过程,即求材料内空气速度、密度与压力以及材料温度的变化规律。针对每种情形,在认识其物理过程基础上建立数学模型,也即写出控制方程及定解条件。而后对其数值求解,最终详举实例,显示求解的结果。

## 4.1 达西定律与渗透率

### 4.1.1 达西定律

达西定律是实验定律,最先由达西通过水在泥砂中渗流得到。如示意图 4-2,其数学形式为

$$q_v = \frac{K}{\eta} A \frac{\Delta p}{H} \quad (4-1-1)$$

式中,  $A$  与  $H$  是多孔材料矩形板试样的面积与厚(高)度,也是流体流经的截面积与长度,单位分别为  $\text{m}^2$  和  $\text{m}$ ;  $q_v$  是牛顿流体以很低速度渗流通过的体积流量,单位为  $\text{m}^3/\text{s}$ ;  $\eta$  为流体的动力粘度,单位为  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ;  $\Delta p$  为流过试样板的压力降,单位为  $\text{Pa}$ ; 比例系数  $K$  为渗透率,单位为  $\text{m}^2$ 。请读者注意式(4-1-1)与第1章中式(1-1-1)的差别,式(1-1-1)中的  $k$  是与孔隙内流体性质有关的物理量,而式(4-1-1)中的  $K$  与孔隙内流体性质无关,仅仅取决于多孔材料孔隙结构。有些文献称  $k$  为渗透率而称  $K$  为比渗透率(specific permeability)。本书中只使用  $K$ , 并称其为渗透率。

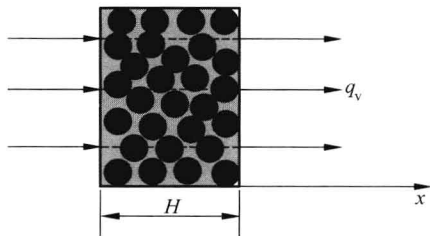


图 4-2 达西定律示意图

与傅里叶定律式(2-1-5)相仿,将式(4-1-1)表示成微分的形式,即

$$v = -\frac{K}{\eta} \text{grad} p \quad (4-1-2)$$

或

$$-\nabla p - \frac{\eta}{K} v = 0 \quad (4-1-3)$$

式(4-1-2)中的负号表示速度方向与压力梯度相反,也就是说,流体总是朝着压力下降的方向流动。其中速度向量  $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ 。因此,在图 4-2 所示一维直角坐标系内,式(4-1-2)表示为

$$u = -\frac{K}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4-1-4)$$

式中,  $u$  是流体在多孔材料内沿坐标  $x$  方向的速度,常用单位为 mm/s。需强调指出,这里的速度  $u$  并不是存在于多孔材料内孔隙间流体的真实速度,而是一种折算速度,其定义按图 4-2 所示,为

$$u = \frac{q_v}{A} \quad (4-1-5)$$

关于这一折算速度,文献[1]中有不同的命名,如渗流(seepage)速度、过滤(filtration)速度、表面(superficial)速度、体积通量及达西速度。本书将使用达西速度。

根据体积孔隙率  $\phi$  等于面积孔隙率的假定,达西速度  $v$  与真实速度  $V$  的关系表示为

$$v = \phi V \quad (4-1-6)$$

在引入达西速度后,多孔介质被视为连续介质,达西速度可对介质内任何一点定义,只是这个点要理解为足够的大,它是一个表征元容积,即表征元容积本身是体积微小的多孔体。正因为引入达西速度后可将多孔介质视为连续介质,人们在描述诸如多孔介质内速度、密度及温度分布时,直接用速度一词,而其真实含义是达西速度。读者在书写有关多孔材料质量、动量及能量守恒方程时,应特别注意达西速度的引入对它们的影响。

由于达西定律物理含义清晰及数学表示简明,它与热传导中傅里叶定律、传质的费克定律,甚至与粘性流体中的牛顿定律、弹性体中的胡克定律及电学中的欧姆定律一样,被后人广泛应用,并正在发挥着重要作用。尤其是,在讨论多孔材料传热传质问题时,常常用达西定律替代动量方程,使整个问题的描述与求解都大大简化。

为了更好地理解与应用达西定律,现分析与讨论达西定律与粘性流体运动方程的关系,将两者之间的关系归结为如下两个方面。

### 1. 达西定律是粘性流体运动方程在特定条件下的结果

按粘性流体力学<sup>[2]</sup>介绍,不可压缩粘性流体向量形式的纳维-斯托克斯(N-S)方程为

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{V} \quad (4-1-7)$$

式中,  $\mathbf{V}$  为流体速度向量;  $p$  为流体压力;  $\rho$  与  $\eta$  为流体密度与动力粘度。式(4-1-7)的物理含义为, 在粘性流体流场内, 单位体积物质在单位时间内动量的变化量等于作用在该单位体积上的力。这里, 式(4-1-7)等号左边表示动量的变化, 等号右边表示作用在单位体积上的力, 且其中两项分别为压力项与粘性力项, 都是作用在单位体积表面上的力, 称作表面力。此处, 体积力被忽略。

图 4-3 所示, 间距为  $\delta$  的两平行平板间的定常流动, 也称泊肃叶(Poiseuille)流动, 在这样特定条件下, 式(4-1-7)被简化。在定常流动条件下, 动量变化为 0, 即式(4-1-7)等号左边为 0, 并且, 速度  $u$  不随  $x$  变化, 也即速度与坐标  $x$  无关。对于平行平板间的流体流动, 意味着流动速度只能是坐标  $z$  的函数。这样, 式(4-1-7)简化为

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4-1-8)$$

在  $z=0$  与  $z=\delta$  处, 即流体在上、下平行板壁面处,  $u=0$ 。

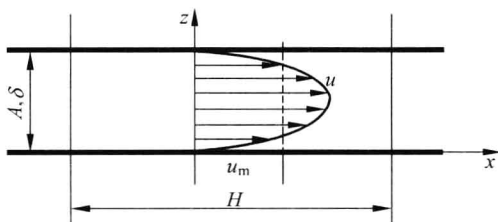


图 4-3 平行槽道内低速流

根据已提供的边界条件求解方程(4-1-8)可得

$$u = \frac{z(z-\delta)}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4-1-9)$$

根据平均速度  $u_m$  的定义并将式(4-1-9)代入其中可得

$$u_m = \frac{q_v}{A} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u dz = -\frac{\delta^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4-1-10)$$

将  $\frac{\partial p}{\partial x}$  表示为  $\frac{\Delta p}{H}$ ,  $\Delta p$  是流体流过距离  $H$  的压力降, 将  $\frac{\Delta p}{H}$  代入式(4-1-10), 再整理

成如式(4-1-1)所示达西定律的形式,则

$$q_v = \frac{\delta^2}{12\eta} A \frac{\Delta p}{H} \quad (4-1-11)$$

对比式(4-1-11)与式(4-1-1),可得渗透率  $K$  为

$$K = \frac{\delta^2}{12} \quad (4-1-12)$$

综上所述,式(4-1-11)是在特定条件下粘性流体运动方程(4-1-8)的解,它也间接地说明达西定律是粘性流体运动方程在特定条件下的结果。这一结果反映多孔介质内粘性流体的压力差与粘性力平衡,并忽略流体动量变化。同时,由式(4-1-12)提供了估算多孔材料渗透率的简要公式。

## 2. 扩展的达西定律

当多孔介质内流体的动量变化不能被忽略时,用式(4-1-2)来计算流动速度就不行了。研究者提出了很多模型对达西定律进行修正,这里仅扼要介绍 Wooding<sup>[3]</sup>提出的方程。他从不可压缩粘性流体 N-S 方程(4-1-7)出发,对达西定律进行两项重大修正:

其一,将式(4-1-7)等号左边关于动量变化中的速度  $\mathbf{v}$  通过式(4-1-6)用达西速度  $\mathbf{v}$  代替,从而引入了孔隙率  $\phi$ 。

其二,将式(4-1-7)等号右边关于压力梯度项及粘性力项用式(4-1-3)的达西定律替代。

由此,使式(4-1-7)成为

$$\rho \left[ \frac{1}{\phi} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \frac{1}{\phi^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \frac{\eta}{K} \mathbf{v} \quad (4-1-13)$$

式(4-1-13)就是 Wooding 方程。

### 4.1.2 渗透率

出现在式(4-1-1)中的渗透率  $K$  是反映多孔材料性质的重要参数。为了更好地理解它的含义,将式(4-1-1)改写成

$$K = \frac{q_v \eta}{A \Delta P / H} \quad (4-1-14)$$

渗透率  $K$  基本计量单位为达西(Darcy),1 Darcy 是指动力粘度  $\eta=1 \text{ cP}$  ( $1 \text{ P}=0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ )的流体在  $1 \text{ cm}$  具有  $1$  个物理大气压的压降,即  $\Delta P/H=1 \text{ atm/cm}$ ,的

条件下,以 1 s 渗流 1 cm<sup>3</sup>,即  $q_v = 1 \text{ cm}^3/\text{s}$ ,时的渗透流率。将上述单位代入式(4-1-14),可得

$$1[\text{Darcy}] = \frac{1[\text{cm}^3/\text{s}] \times 1[\text{cP}]}{1[\text{cm}^2] \times 1[\text{atm}/\text{cm}]}$$

经运算后,得

$$\begin{aligned} 1[\text{Darcy}] &= \frac{1[\text{cm}^3/\text{s}] \times 0.01 \times 0.1[\text{Pa} \cdot \text{s}]}{1(\text{cm}^2) \times 101\,325(\text{Pa}/\text{cm})} \\ &= \frac{1[\text{cm}^2] \times 0.01 \times 0.1}{101\,325} \\ &= 0.987 \times 10^8 \text{ cm}^2 \\ &= 0.987 \mu\text{m}^2 \\ &= 0.987 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

在实际计算中所采用的渗透率单位常有 Darcy、 $\mu\text{m}^2$ 、 $\text{cm}^2$  与  $\text{m}^2$  多种,用不同单位表达同一渗透率其数值相差几个数量级,读者在使用时务必谨慎以免出错。

渗透率也有相应地无量纲特征数,称为达西数,记作  $Da$ ,定义为

$$Da = \frac{K}{L^2}$$

这里, $L$  是定性尺寸。请注意,选什么几何尺度作为定性尺寸,会使  $Da$  的值有很大的差别。例如,用多孔材料的整体(如平板)几何尺度作为定性尺寸,可能是 cm 或 m 的数量级。若用多孔材料孔隙的几何尺度作为定性尺寸,则可能是  $\mu\text{m}$  或 mm 的数量级。本书不采用无量纲渗透率  $Da$  来讨论问题。

大多数多孔材料的渗透率是由实验测量提供。表 4-1(摘自文献[1])列出若干典型多孔材料的孔隙率与渗透率。

表 4-1 常见多孔固体材料的孔隙率与渗透率

名 称	孔隙率 $\phi$	渗透率 $K/\text{m}^2$
砖	0.12~0.34	$10^{-15} \sim 2.2 \times 10^{-13}$
烟		$1.1 \times 10^{-9}$
水泥(沥青)		$10^{-13} \sim 2.3 \times 10^{-11}$
铜粉	0.09~0.34	$3 \times 10^{-10} \sim 1.5 \times 10^{-9}$
软木板		$2.4 \times 10^{-11} \sim 5.1 \times 10^{-11}$
头发		$8.3 \times 10^{-10} \sim 1.2 \times 10^{-9}$

续表

名 称	孔隙率 $\phi$	渗透率 $K/\text{m}^2$
皮革	0.56~0.59	$9.5 \times 10^{-14} \sim 1.2 \times 10^{-13}$
石灰石	0.04~0.1	$2.0 \times 10^{-15} \sim 4.5 \times 10^{-14}$
砂	0.37~0.5	$2.0 \times 10^{-11} \sim 1.8 \times 10^{-10}$
砂岩(油砂)	0.08~0.38	$5.0 \times 10^{-16} \sim 3.0 \times 10^{-12}$
硅土粉末	0.37~0.49	$1.3 \times 10^{-14} \sim 5.1 \times 10^{-14}$
土壤	0.43~0.54	$2.9 \times 10^{-13} \sim 1.4 \times 10^{-11}$

既然多孔材料的渗透率作为材料的一种特性,它由材料几何结构所决定。这样,对于结构形式比较简单的材料,可以根据其几何特征用理论方法计算得到渗透率。如图 4-3 所示平行平板的结构,可按式(4-1-12)求得渗透率  $K$ 。参见图 1-4 与图 1-5 木材细胞结构,若取相当的  $\delta=5 \mu\text{m}$ ,则  $K \approx 10^{-11} \sim 10^{-12} \text{ m}^2$ 。

确实,已有很多研究者对各类多孔材料建立数学模型以预测材料的渗透率<sup>[4]</sup>。其中比较成熟的应推 Carman-Kozeny 模型,它适用于由颗粒或纤维构成的固定床。模型中引入颗粒的有效平均直径  $d_p$ ,如果认为构成多孔材料的固体颗粒直径是均匀的,孔隙率  $\phi$  是已知的,则 Carman-Kozeny 模型给出的理论公式为<sup>[1]</sup>

$$K = \frac{d_p^2 \phi^3}{180(1-\phi)^2} \quad (4-1-15)$$

式中,常数 180 是为使理论计算的数据与实验测量数据相一致而得到的。

从本节上述介绍的达西定律与渗透率中我们看到,对于渗透率低的多孔材料,用达西定律作为动量方程是可行的。虽然它是一种近似,但计算过程可大大简化。因此,在本书以后各章分析材料内流体的运动大都采用达西定律。

## 4.2 守恒方程及其封闭性

这一节介绍固气多孔材料传热传质的守恒方程及热力学关系式。由于固气多孔材料是作为材料骨架的固体与骨架孔隙间的气体的混合物,守恒方程的推导必须特别注意这一特点。

### 4.2.1 质量守恒方程

#### 4.2.1.1 固相质量守恒方程

多孔材料内固相骨架是密实的,且不计作为骨架的固相与骨架孔隙内气相之间化学变化等因素可能引起质量交换,则材料被加热时,固相骨架的密度  $\rho_s$  始终不变(忽略体积膨胀),表示为

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial \tau} = 0 \quad (4-2-1)$$

#### 4.2.1.2 气相质量守恒方程

多孔材料内的气相物质,若处在封闭的孔隙内,其质量与密度  $\rho_a$  在受热过程也不发生变化,质量守恒方程为

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial \tau} = 0 \quad (4-2-2)$$

若孔隙连通,材料被加热时,相邻孔隙间空气就会流动,空气的密度  $\rho_a$  就会变化,其质量守恒的形式就不像式(4-2-2)那样简明。下面我们采用第2章中在特定坐标系内推导导热方程的方法来推导气体质量守恒方程。

在直角坐标系内取元体  $dV(=dxdydz)$  作为分析对象,如图4-4所示。对于该单元而言,单位时间内通过边界面进入体系的质量应等于该体系质量的增加,其数学形式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi \rho_a}{\partial \tau} dxdydz = & [(\rho_a u)_x - (\rho_a u)_{x+dx}] dydz \\ & + [(\rho_a v)_y - (\rho_a v)_{y+dy}] dx dz \\ & + [(\rho_a w)_z - (\rho_a w)_{z+dz}] dx dy \end{aligned} \quad (4-2-3)$$

根据泰勒级数公式,式(4-2-3)中

$$(\rho_a u)_{x+dx} = (\rho_a u)_x + \frac{\partial \rho_a u}{\partial x} dx \quad (4-2-4)$$

$$(\rho_a v)_{y+dy} = (\rho_a v)_y + \frac{\partial \rho_a v}{\partial y} dy \quad (4-2-5)$$

$$(\rho_a w)_{z+dz} = (\rho_a w)_z + \frac{\partial \rho_a w}{\partial z} dz \quad (4-2-6)$$



将式(4-2-4)、式(4-2-5)和式(4-2-6)代入式(4-2-3),经整理后,可得

$$\frac{\partial \phi \rho_a}{\partial \tau} = - \left( \frac{\partial \rho_a u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_a v}{\partial y} + \frac{\partial \rho_a w}{\partial z} \right) \quad (4-2-7)$$

式(4-2-7)即为固气多孔材料气相质量守恒方程,也是作为因变量空气密度  $\rho_a$  的控制方程。上式的物理含义是,单位体积单位时间内空气质量的增加(等号左边)等于单位时间内流体通过体积边界流入体积的质量(等号右边)。提醒读者注意,式中的速度  $u$ 、 $v$  与  $w$  为达西速度,密度  $\rho_a$  则是空气真实密度,体孔隙率与面孔隙率相等。

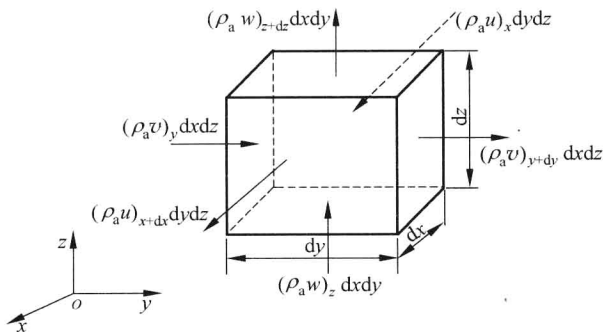


图 4-4 推导固气多孔材料内气体质量守恒方程的单元体  $dV$

#### 4.2.1.3 固气多孔材料质量守恒方程

固气多孔材料的密度  $\rho$  定义为

$$\rho = (1 - \phi) \rho_s + \phi \rho_a \quad (4-2-8)$$

式中,孔隙率  $\phi$  为常数。为此,将式(4-2-1)改写成

$$\frac{\partial (1 - \phi) \rho_s}{\partial \tau} = 0 \quad (4-2-9)$$

再将式(4-2-9)与式(4-2-7)相加,并将式(4-2-8)代入,可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = - \left( \frac{\partial \rho_a u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_a v}{\partial y} + \frac{\partial \rho_a w}{\partial z} \right) \quad (4-2-10)$$

这是固气多孔材料质量守恒方程。其实,式(4-2-8)本身也可以作为多孔材料质量守恒方程的一种形式。

## 4.2.2 能量守恒方程

与推导第2章中导热方程式(2-2-22)与上述气相质量守恒方程式(4-2-10)相仿,推导如下固相、气相及固气多孔材料的能量守恒方程。

### 4.2.2.1 固相能量守恒方程

与4.2.1节一样,针对以图4-4所示的元体为一热力学体系,可写出元体内固相骨架的能量平衡关系如下:

$$(1-\phi)\rho_s c_s \frac{\partial t_s}{\partial \tau} = (1-\phi)\lambda_s \left( \frac{\partial^2 t_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_s}{\partial z^2} \right) + h_{sa} A_{sa} (t_a - t_s) \quad (4-2-11)$$

式(4-2-11)的物理含义如图4-5所示。

式(4-2-11)中的 $t_s$ 与 $t_a$ 是固相骨架与骨架间孔隙内空气的温度; $(1-\phi)\rho_s$ 是单位体积固气多孔材料中固相骨架的质量; $\phi$ 为体积孔隙率; $(1-\phi)\lambda_s$ 中的 $\phi$ 为面孔隙率,假定两者的 $\phi$ 相同。式中 $h_{sa}$ 与 $A_{sa}$ 分别为固气多孔材料内固气相交界面上的表面传热系数与单位体积内固气相之间接触表面积。这个表面积被称为比面(比表面积的简称),与孔隙率 $\phi$ 被视为多孔材料特性参数一样,比面 $A_{sa}$ 也是多孔材料的重要特征量,化学工业中作为催化剂的材料与环保工程中作为吸附剂的材料等都追求高的比面。

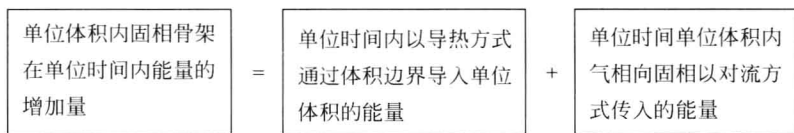


图 4-5 固相能量平衡关系

### 4.2.2.2 气相能量守恒方程

气相的能量平衡关系为

$$\phi \frac{\partial \rho_a c_a t_a}{\partial \tau} = \phi \lambda_a \left( \frac{\partial^2 t_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_a}{\partial z^2} \right) - c_a \left( \frac{\partial \rho_a u t_a}{\partial x} + \frac{\partial \rho_a v t_a}{\partial y} + \frac{\partial \rho_a w t_a}{\partial z} \right) + h_{sa} A_{sa} (t_s - t_a) \quad (4-2-12)$$

式(4-2-12)的物理含义表示为图4-6。

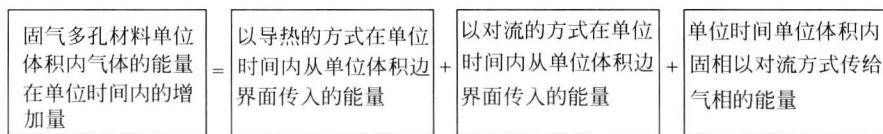


图 4-6 气相能量平衡关系

### 4.2.2.3 固气多孔材料能量守恒方程

为推导固气多孔材料能量守恒方程,再引入如下假定:

(1) 在固气多孔材料内各处,固相骨架的温度  $t_s$  与气相的温度  $t_a$  始终相同且为  $t$ ,即

$$t_s = t_a = t \quad (4-2-13)$$

应该说,上述假定是有条件的。条件是气相的流动速度足够的低,固气多孔材料的比面足够的大。式(4-2-13)的成立也被称为达到局部热平衡。

(2) 固气多孔材料的导热系数为

$$\lambda = (1 - \phi)\lambda_s + \phi\lambda_a \quad (4-2-14)$$

同样,式(4-2-14)这一假定也是有条件的,它们在 4.3.1 节中有更详尽的说明。

(3) 固气多孔材料的比热容为

$$\rho c = (1 - \phi)\rho_s c_s + \phi\rho_a c_a \quad (4-2-15)$$

上式是按比热容的基本定义得到的,并不包含特定的条件。

与推导式(4-2-10)相仿,根据式(4-2-13)、式(4-2-14)与式(4-2-15)的假定,将式(4-2-11)与式(4-2-12)相加,可得固气多孔材料的能量平衡关系为

$$\frac{\partial \rho c t}{\partial \tau} = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \rho_a c_a u t}{\partial x} + \frac{\partial \rho_a c_a v t}{\partial y} + \frac{\partial \rho_a c_a w t}{\partial z} \right) \quad (4-2-16)$$

式(4-2-16)的物理含义为:单位时间内单位体积的固气多孔材料能量的增加(等号左边)等于单位时间内以导热方式通过边界导入单位体积的能量与以对流方式通过边界传入单位体积的能量之和(等号右边)。提醒读者注意,上式中,孔隙率不再出现,反映固相与气相间的热交换也不出现,这是由于上述式(4-2-13)、式(4-2-14)与式(4-2-15)引入所致。也就是说,式(4-2-16)的成立是以式(4-2-13)、式(4-2-14)与式(4-2-15)成立为前提。

式(4-2-16)是关于因变量温度  $t$  的控制方程。

### 4.2.3 动量方程与气体状态方程

#### 4.2.3.1 动量方程

在固气多孔材料有效孔隙率与渗透率很低、气体流动速度很小条件下,材料内气体流动的动量方程可取达西定律的形式,即将式(4-1-2)写成标量形式如下:

$$u = -\frac{K_x}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4-2-17)$$

$$v = -\frac{K_y}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4-2-18)$$

$$w = -\frac{K_z}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4-2-19)$$

式(4-2-17)~式(4-2-19)是关于固气多孔材料内空气速度的控制方程。 $K_x$ 、 $K_y$ 与  $K_z$  是多孔材料平板沿宽度、长度及厚度方向上的渗透率。

#### 4.2.3.2 气体状态方程

由式(4-2-17)~式(4-2-19)可知,空气流动的速度受空气压力  $p$  的梯度所支配,而空气的压力取决于当地的温度与空气密度。将空气视为理想气体,则空气压力  $p$  可表示为

$$p = \frac{\rho_a RT}{M_a} \quad (4-2-20)$$

式中,  $M_a$  是空气的摩尔质量(28.97 g/mol);温度  $T$  以绝对温度(K)表示。

### 4.2.4 方程组的封闭性

回顾式(4-2-7)、式(4-2-8)、式(4-2-16)~式(4-2-20)共计 7 个方程,其中有 7 个因变量。它们分别是由式(4-2-7)控制的空气密度  $\rho_a$ ,由式(4-2-8)控制的固气多孔材料密度  $\rho$ ,由式(4-2-16)控制的固气多孔材料的温度  $t$ ,由式(4-2-17)、式(4-2-18)与式(4-2-19)控制的空气速度  $u$ 、 $v$  与  $w$  以及由式(4-2-20)控制的空气压力  $p$ 。这 7 个方程所包含的 7 个因变量的内在联系如图 4-7 所示。

下面结合图 4-7 对固气多孔材料被加热后发生在材料内部传热传质现象,也即 7 个因变量的相互影响作进一步解说。当材料被加热后,温度  $t$  就会上升,在材

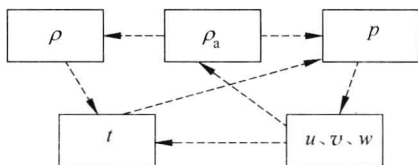


图 4-7 7 个因变量的耦合关系

料内部会形成温度场,相应地,空气压力  $p$  会变化,形成空气压力场,材料内各处空气压力不同。空气压力的差会推动空气的流动,从而在材料内部形成空气速度场  $u$ 、 $v$  及  $w$ 。空气的流动,一方面,引起了热对流,导致温度  $t$  的变化,另一方面,导致空气密度  $\rho_a$  的变化。而空气密度的变化,一方面,引起空气压力  $p$  的变化,另一方面,则又导致材料密度  $\rho$  的变化。而材料密度  $\rho$  的变化又会对温度有影响。

图 4-7 所示 7 个因变量的内在联系表明这 7 个物理量是相互影响的,或者说,互为因果。从数学上讲,包含 7 个因变量的 7 个方程是相互耦合的,其中任何一个方程都不可能单独求解。

这种独立方程式个数与独立因变量个数相等,且能保证有唯一解的方程组为一封闭方程组。在构造用方程组形式表示数学模型时,方程组的封闭性是正确数学模型的必要条件。

在求数学模型唯一解时,除方程组的封闭性是必要条件之外,还必须要有保证唯一解的定解条件。关于固气多孔材料加热问题的定解条件将在以下几节按不同情形再作介绍。

### 4.3 封闭孔隙多孔材料加热

孔隙闭合的固气多孔材料是一种常见的多孔材料,它们是固气多孔材料的一种极端情形,即认为孔隙之间是不连通的。例如,用于隔热的泡沫塑料可近似视为孔隙封闭的多孔材料。

由于材料内的孔隙是闭合的,孔隙内的空气就不会在孔隙间流动,则上述关于空气流动速度的方程式(4-2-17)、式(4-2-18)与式(4-2-19)不再存在, $u$ 、 $v$  及  $w$  从因变量中消失。由于空气不流动,孔隙内空气密度  $\rho_a$  不再变化,相应地,材料密度  $\rho$  也不再变化。这样,在上述图 4-7 所示的 7 个因变量中只保留温度  $t$  与空气压力  $p$  两个因变量。也就是,7 个方程只保留式(4-2-16)与式(4-2-20)两个方程,且两个方程不再耦合,因为,空气压力  $p$  唯一取决于温度  $t$ ,而温度并不依赖于空气压力。这样,关于温度  $t$  的方程(4-2-16)可不依赖于关于压力  $p$  的方程(4-2-20)而单

独求解,且式(4-2-16)退化为导热方程,其形式与密实固体导热方程相同,求解方法也相同。然而,两种导热方程的内容并不相同,为此,引入“等效导热系数”这一概念。下面将就闭合孔隙固气多孔材料导热方程及等效导热系数展开讨论。

### 4.3.1 等效导热系数与分形理论

闭合孔隙多孔材料导热方程是上述式(4-2-16)的简化,省略了其中的对流项,表示为

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (4-3-1)$$

式中的比热容  $\rho c$  需满足式(4-2-15),导热系数  $\lambda$  需满足式(4-2-14)。

关于比热容  $\rho c$  式(4-2-15)的等效性与固气多孔材料结构形式无关,只取决于固相与气相各自的比热容及孔隙率。关于导热系数  $\lambda$  式(4-2-14)的等效性不仅取决于固相与气相各自的导热系数及孔隙率,还取决于固气多孔材料结构形式。为此,把导热系数转化为等效导热系数的同时,将意味着以某种理想化结构形式来等效实际的多孔材料。人们为了等效不同形式的实际材料而提出了不同的结构模型<sup>[5-9]</sup>。下面讨论固气多孔材料结构形式与等效导热系数的关系。

#### 4.3.1.1 简单串并联模型

若将固气多孔材料的结构视为简单的串联或并联结构,则与计算电阻网络的串并联相同,计算热阻网络。

图 4-8 所示孔隙率为  $\phi$  的一个单位立方体(例如  $1 \text{ mm}^3$ )多孔材料,固相与气相的导热系数分别为  $\lambda_s$  与  $\lambda_a$ 。就传热效果而言,图 4-8(a)结构可等效成图 4-8(b)结构。

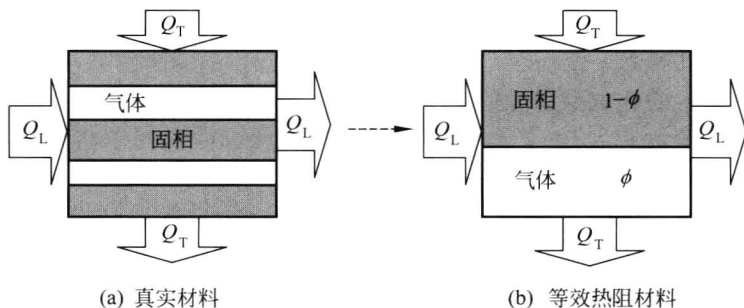


图 4-8 简单串并联结构多孔材料

当热流  $Q_L$  纵向通过该材料时,该材料视为并联结构,其热阻网络如图 4-9(a) 所示的并联网络。图中  $R_a$  与  $R_s$  分别为气相与固相的热阻。热阻的计算公式与电阻相似,一段导线的电阻与导线长度成正比,与导线截面积成反比,比例系数为导电材料的电阻率。同样,热阻与热流流过的材料长度成正比,与热流流过的截面积成反比,比例系数为热阻率(导热系数的倒数)。

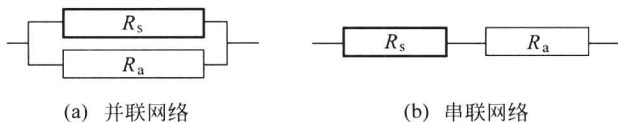


图 4-9 简单串并联结构热阻网络

对图 4-8(b)中气相而言,热流  $Q_L$  流过的截面积为  $A_a$ ,  $A_a$  在总截面积为 1 ( $1 \text{ mm}^2$ ) 条件下,等于孔隙率  $\phi$ ,则气相热阻  $R_a$  为

$$R_a = \frac{1}{\lambda_a} \times \frac{1}{A_a} = \frac{1}{\lambda_a} \times \frac{1}{\phi} \quad (4-3-2)$$

同理,对图 4-8(b)中固相而言,热流  $Q_L$  流过的截面积为  $1-\phi$ ,固相热阻  $R_s$  为

$$R_s = \frac{1}{\lambda_s} \times \frac{1}{A_s} = \frac{1}{\lambda_s} \times \frac{1}{1-\phi} \quad (4-3-3)$$

根据并联热阻的运算规则,可得纵向热阻  $R_L$  为

$$R_L = \frac{1}{\lambda_L} \times \frac{1}{1^2} = \frac{R_a R_s}{R_a + R_s} = \frac{1}{\lambda_s(1-\phi) + \lambda_a \phi} \quad (4-3-4)$$

式(4-3-4)中第 1 个等号是图 4-8 所示的材料的纵向热阻定义式,其中  $\lambda_L$  为材料纵向等效导热系数,第 2 个等号是并联热阻表达式,第 3 个等号则是将式(4-3-2)的  $R_a$  与式(4-3-3)的  $R_s$  代入式(4-3-4)所示的结果。由式(4-3-4)可得到材料纵向等效导热系数  $\lambda_L$  为

$$\lambda_L = (1-\phi)\lambda_s + \phi\lambda_a \quad (4-3-5)$$

回顾式(4-2-14)可见,与式(4-3-5)相同。

见图 4-8,当热流  $Q_T$  横向通过该材料时,该材料视为串联结构,其热阻网络如图 4-9(b)所示的串联网路,其中气相热阻  $R_a$  为

$$R_a = \frac{1}{\lambda_a} \times \frac{\phi \times 1}{1^2} \quad (4-3-6)$$

固相热阻  $R_s$  为

$$R_s = \frac{1}{\lambda_s} \times \frac{(1-\phi) \times 1}{1^2} \quad (4-3-7)$$

材料横向热阻  $R_T$  为

$$R_T = \frac{1}{\lambda_T} \times \frac{1}{1^2} = R_a + R_s = \left( \frac{\phi}{\lambda_a} + \frac{1-\phi}{\lambda_s} \right) \times \frac{1}{1^2} \quad (4-3-8)$$

由式(4-3-8)可得到材料横向等效导热系数  $\lambda_T$  为

$$\lambda_T = \frac{\lambda_s \lambda_a}{\phi \lambda_s + (1-\phi) \lambda_a} \quad (4-3-9)$$

串联与并联模型的区别在于,对纵向热流  $Q_L$  而言,并联模型中的固相是连通的,而对横向热流  $Q_T$  而言,串联模型中的固相被气相隔开,固相的贡献仅仅在于减少热流通过气相的厚度。

尽管简单串并联模型过于简化,与实际多孔材料还有较大差距,但运用这种简单模型仍能有效地帮助我们分析实际材料的导热性能,例如,像木材这样的材料。众所周知,木材在导热性能上有很强取向性,顺木材纹理方向的导热系数  $\lambda_L$  大于垂直纹理方向的导热系数  $\lambda_T$ 。有诸多文献<sup>[10,11]</sup>报道了实验结果,对于不同树种,  $\lambda_L/\lambda_T$  的值有所不同,大致在 2~3 这个范围内。这里,我们不妨用串并联模型对它进行分析。若视木材顺纹理方向为并联结构,而垂直纹理方向为串联结构,则式(4-3-5)与式(4-3-9)之比为

$$\frac{\lambda_L}{\lambda_T} = \frac{[(1-\phi)\lambda_s + \phi\lambda_a][\phi\lambda_s + (1-\phi)\lambda_a]}{\lambda_s \lambda_a} \quad (4-3-10)$$

据文献[12]介绍,木材细胞壁固相物质的导热系数  $\lambda_s = 0.3 \sim 0.7 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 细胞腔内空气导热系数  $\lambda_a = 0.03 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 两者相差一个数量级。作为一种估算,不妨假定  $\lambda_a = 0.1 \times \lambda_s$ 。表 4-2 所列显示孔隙率  $\phi$  对  $\lambda_L/\lambda_T$  的影响。由这组数据可见,  $\phi$  对  $\lambda_L/\lambda_T$  的影响是明显的,  $\lambda_L/\lambda_T$  的值在 1~3 的范围内,  $\phi = 0.5$ ,  $\lambda_L/\lambda_T$  达最大值。

表 4-2 孔隙率  $\phi$  对  $\lambda_L/\lambda_T$  的影响

$\phi$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\lambda_L/\lambda_T$	1.00	1.73	2.30	2.70	2.94	3.03	2.94	2.70	2.30	1.73	1.00



### 4.3.1.2 细胞胞管的等效导热系数

这一节,继续用串并联模型来讨论图 1-5 所示木材纤维细胞管的等效导热系数。为便于讨论,突出物理概念,把木材纤维细胞壁模型化为正方形截面细长管。图 4-10 所示为木材纤维细胞胞管的一个截段,体积为单位立方体,细胞壁厚度为  $\delta$ ,孔隙率为  $\phi$ 。

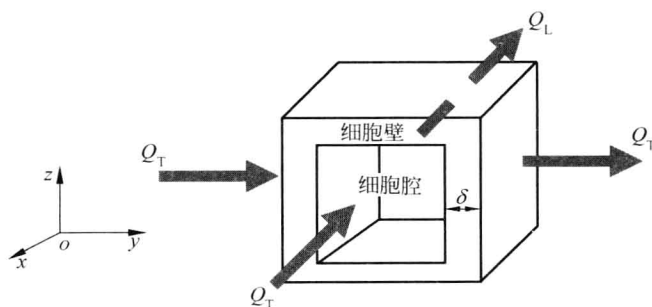


图 4-10 木材细胞胞管传热示意图

当纵向热流  $Q_L$  通过图 4-10 所示结构时,此立方体被视为一并联结构,其热阻网络如图 4-11(a)所示。

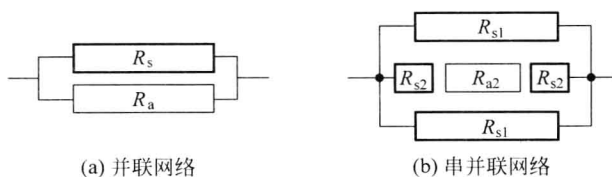


图 4-11 细胞胞管结构热阻网络

对照图 4-11(a)与图 4-9(a)可知,两者完全相同。相应地,关于  $R_a$  与  $R_s$  的表达式也与式(4-3-2)和式(4-3-3)完全相同,即图 4-10 中纵向热流  $Q_L$  通过细胞腔(气相)的截面积为  $A_a = \phi \times 1^2$ ,通过细胞壁(固相)的截面积为  $A_s = (1 - \phi) \times 1^2$ 。这样,纵向等效导热系数  $\lambda_L$  也可由式(4-3-5)表示,这里不再重复。

当横向热流  $Q_T$  通过图 4-10 所示结构,则此立方体被视为一串并联网路,其热阻网络如图 4-11(b)所示。首先是并联,横向热流  $Q_T$  分三个分支平行地通过图 4-10 结构。其中  $R_{s1}$  是第一分支与第三分支的热阻,表示结构顶(底)部壁沿  $y$  方向的热阻。其长度为 1,截面积为  $\delta \times 1$ ,则热阻  $R_{s1}$  为

$$R_{s1} = \frac{1}{\lambda_s} \times \frac{1}{\delta \times 1} \quad (4-3-11)$$

图 4-11(b) 中第二分支的热阻由  $R_{s2}$ 、 $R_{a2}$  与  $R_{s2}$  三个热阻串联而成, 其中  $R_{s2}$  表示结构左(右)侧壁厚(沿  $y$  方向)的热阻。热流通过的长度为  $\delta$ , 截面积为  $(1-2\delta) \times 1$ , 则热阻  $R_{s2}$  为

$$R_{s2} = \frac{1}{\lambda_s} \times \frac{\delta}{(1-2\delta) \times 1} \quad (4-3-12)$$

$R_{a2}$  是第二分支中管胞腔内空气部分的热阻。热流通过的长度为  $(1-2\delta)$ , 截面积为  $(1-2\delta) \times 1$ , 则热阻  $R_{a2}$  为

$$R_{a2} = \frac{1}{\lambda_a} \times \frac{1-2\delta}{(1-2\delta) \times 1} = \frac{1}{\lambda_a \times 1} \quad (4-3-13)$$

横向热流  $Q_T$  第二分支的总热阻  $R_{sa}$  为

$$\begin{aligned} R_{sa} &= 2R_{s2} + R_{a2} = \frac{2\delta}{\lambda_s(1-2\delta) \times 1} + \frac{1}{\lambda_a \times 1} \\ &= \frac{2\lambda_a\delta + \lambda_s(1-2\delta)}{\lambda_a\lambda_s(1-2\delta) \times 1} \end{aligned} \quad (4-3-14)$$

最终, 横向热流  $Q_T$  通过图 4-10 所示结构, 该结构呈现的热阻是三支热阻的并联, 表示为

$$\begin{aligned} R_T &= \frac{1}{\lambda_T} \times \frac{1}{1^2} = \frac{R_{sa}R_{s1}/2}{R_{sa} + R_{s1}/2} \\ &= \frac{\frac{2\lambda_a\delta + \lambda_s(1-2\delta)}{\lambda_a\lambda_s(1-2\delta) \times 1} \times \frac{1}{2\lambda_s\delta \times 1}}{\frac{2\lambda_a\delta + \lambda_s(1-2\delta)}{\lambda_a\lambda_s(1-2\delta) \times 1} + \frac{1}{2\lambda_s\delta \times 1}} \\ &= \frac{2\lambda_a\delta + \lambda_s(1-2\delta)}{4\lambda_a\lambda_s\delta^2 + 2\lambda_s^2(1-2\delta)\delta \times 1 + \lambda_a\lambda_s(1-2\delta) \times 1^2} \end{aligned} \quad (4-3-15)$$

从式(4-3-15)可得图 4-10 所示结构横向等效导热系数  $\lambda_T$  为

$$\lambda_T = \frac{4\lambda_a\lambda_s\delta^2 + (2\lambda_s^2\delta + \lambda_a\lambda_s \times 1)(1-2\delta)}{[2\lambda_a\delta + \lambda_s(1-2\delta)] \times 1} \quad (4-3-16)$$

由于细胞腔内空气的导热系数很小, 作为一种估算, 不妨假定  $\lambda_a \approx 0$ 。这样, 式(4-3-5)与式(4-3-16)分别简化为

$$\lambda_L = (1 - \phi)\lambda_s \quad (4-3-17)$$

与

$$\lambda_T = \frac{2\delta}{1}\lambda_s \quad (4-3-18)$$

图 4-10 中细胞壁厚  $\delta$  与孔隙率  $\phi$  之间有着——对应关系。因为细胞壁截面是方形环截面,其截面面积  $A_s$  还可表示为 4 个梯形面积之和,即

$$A_s = 4 \times \frac{1 + (1 - 2\delta)}{2}\delta = (1 - \phi) \times 1^2 \quad (4-3-19)$$

式(4-3-19)经整理后为

$$4\delta^2 - 4\delta + 1 - \phi = 0 \quad (4-3-20)$$

式(4-3-20)为关于  $\delta$  的二次代数方程,其解为

$$\delta = \frac{1 - \sqrt{\phi}}{2} \quad (4-3-21)$$

式(4-3-21)就是  $\delta$  与  $\phi$  的对应关系。当  $\phi=0$ , 细胞壁厚  $\delta = \frac{1}{2} \times 1$ , 表示整个截面被固相占有。当  $\phi=1$ ,  $\delta=0$ , 表示整个截面被气相占有。

将式(4-3-21)代入式(4-3-18),可得

$$\lambda_T = (1 - \sqrt{\phi})\lambda_s \quad (4-3-22)$$

对比式(4-3-17)与式(4-3-22),可得

$$\frac{\lambda_L}{\lambda_T} = \frac{1 - \phi}{1 - \sqrt{\phi}} = 1 + \sqrt{\phi} \quad (4-3-23)$$

对木材而言,孔隙率范围大致为  $\phi=0.4 \sim 0.8$ , 则  $\lambda_L/\lambda_T=1.6 \sim 1.9$ 。

#### 4.3.1.3 分形理论

关于多孔材料等效导热系数的模型最早由马克斯威尔(J. C. Maxwell)于 1904 年针对含有球型孔隙连续固体的导电性能研究<sup>[13]</sup>, 而后由欧克金(A. Eucken)于 1940 年应用到传热研究的被称为 Maxwell-Eucken 等效导热系数  $\lambda_e$  模型,它的数学形式为

$$\lambda_e = \lambda_s \left[ 1 + \frac{3\phi}{\left( \frac{\lambda_n/\lambda_s + 2}{\lambda_n/\lambda_s - 1} \right) - \phi} \right]$$

(4-3-24)

不妨将  $\phi=0.1\sim0.5$  与  $\lambda_n/\lambda_s=0.1$  代入上式与式(4-3-5),即可得到,Maxwell-Eucken 模型的  $\lambda_e/\lambda_s=0.88\sim0.47$ ,而并联模型的  $\lambda_e/\lambda_s=0.91\sim0.55$ 。虽说两者有明显差别,但在一定条件下,作为一种估算,仍可认为有相当程度的接近。

至今,在传热、材料、化工等诸多领域学术刊物上,可直接查阅到大量有关多孔材料等效导热系数数学模型的文献。它们往往针对材料固相骨架结构形式不同,孔隙形式及其中填充物不同,传热条件不同,运用不同基础理论,提出不同的预测等效导热系数的数学模型。其中,把研究非规则几何形状的分形几何学应用到预测多孔材料等效导热系数广泛地受到人们的重视<sup>[14-17]</sup>。

分形理论是一种研究非规则几何结构的理论,它所研究的对象与传统的欧氏空间体系不同,有其自行体系。表 4-3 概括地表示了分形几何学与欧氏几何学的差异。

表 4-3 分形几何学与欧氏几何学的差异

体 系	描述对象	几何特征尺度	数学表达方式	维 数
欧氏几何学	抽象的人为物体 (简单而标准)	有明确尺度(如 长、宽、角度)	解析形式(解析 几何)	正整数(1、2、3)及 0
分形几何学	客观的自然物体 (复杂而真实)	无明确尺度	数值形式(随 机数)	正分数(含整数)

分形的概念是由美国学者 Mandelbrot 于 1975 年首次提出的,并创造“分形”(fractal)一词。从字面上看,分形的含义是极其零碎而复杂的,而实际上它还隐含着体系内部各处相互的相似性及体系局部与体系整体的相似性,这种内部相似并与整体相似的体系为仿射性相似体系。这种仿射性相似体系在自然界普遍地存在着。1982 年,Mandelbrot 的第一本著作<sup>[18]</sup>问世标志着分形理论初步形成。

对于分形,Mandelbrot 于 1967 年在美国权威的《科学》杂志上发表的题为“英国的海岸线有多长?”的著名论文中有如下形象地阐述:海岸线作为曲线,其特征是极不规则、极不光滑的,呈现极其蜿蜒复杂的变化。我们不能从形状和结构上区分这部分海岸与那部分海岸有什么本质的不同,这种几乎同样程度的不规则性和复杂性,说明海岸线在形貌上在不同处是相互相似的,而且,局部形态和整体态也相似。它在没有建筑物或其他东西作为参照物时,在空中拍摄的 100 km 长的海岸

线与放大的 10 km 长海岸线的两张照片,看上去会十分相似。这种具有自相似性的形态广泛存在于自然界中,如连绵的山川、飘浮的云朵、岩石的断裂口、布朗粒子运动的轨迹、树冠、花菜、大脑皮层,等等。Mandelbrot 把这些局部与整体以某种方式相似的形体称为分形。

大量内部结构几何形状不规则的多孔材料如同上述海岸线那样具有分形特征。Katz 等<sup>[19]</sup>最早用分子吸附法、扫描电镜法验证了多孔材料的孔隙结构具有分形特征。多孔材料孔结构复杂,其中孔隙、孔隙与固相骨架交界面、孔通道等均可视为分形体。

对于一个分形体,分形维数是定量描述分形体结构的一个重要参数,分形维数又叫分维。它以如下数学形式作为自身定义

$$M(\zeta) \propto \zeta^{D_f} \quad (4-3-25)$$

式(4-3-25)表示,分形体系某一物理量的量值  $M(\zeta)$  (不计单位只计大小)正比于待测物理量所在区域尺度  $\zeta$  为底分维数  $D_f$  为指数的指数函数。

下面以闭孔泡沫铝为例说明用分形理论预测多孔材料导热系数的方法,分三个步骤。

### 1. 获得如图 4-12 所示的结构图形

这里以二维(欧氏几何空间)泡沫铝多孔材料为例,图 4-12(a)与(b)分别代表孔隙率不同的材料,白色是孔隙,黑色是固相骨架。这类图形的获得有两种途径,一种是对反映实际泡沫铝多孔材料结构的图片进行二值化处理,即将图片中介于黑(固相骨架)与白(孔隙)的灰色部分,根据其接近黑与白的程度,处理成明确的黑与白,由此组成只有黑与白两种颜色的图片。另一种途径是,根据已知多孔材料的某些宏观特征(如孔隙率、材料是各向同性还是各向异性),借助蒙德卡洛法,按统计规律,确定概率函数(随机函数),产生一系列离散的数,将产生数列的过程编写成计算程序,在计算机上生成一个可视化的特定分形体,如图 4-12。

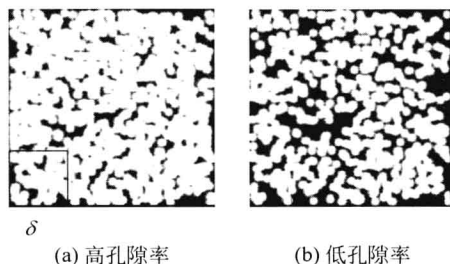


图 4-12 不同孔隙率的闭孔泡沫铝结构二维图形

## 2. 确定分形维数

有关维数的定义有很多种,其中最易理解的有相似维数、豪斯道夫维数、盒维数、拓扑维数等。盒维数应用最广,因为这种维数的数学计算及经验估计相对容易,还可以通过实验近似地估算。利用尺度为 $\delta$ 的方格覆盖二维图形,如图4-13(a)所示, $N(\delta)$ 是覆盖图形中黑色(固相骨架)部分的方格个数,由此可求得盒维数 $D_f$ 为

$$D_f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \frac{\log N(\delta)}{\log \delta} \right| \quad (4-3-26)$$

显然,式(4-3-26)与式(4-3-25)是一致的,式中的 $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ 表示盒维数 $D_f$ 的值应独立于尺度 $\delta$ 。对于图4-12所示的孔隙率不同的平面二维物体,盒维组是不同的。从这里看到,分形维数与多孔材料孔隙率这一宏观物理参数的对应关系,可表示为

$$D_f = F(\phi)$$

同样,也可以将孔隙率与等效导热系数联系起来。

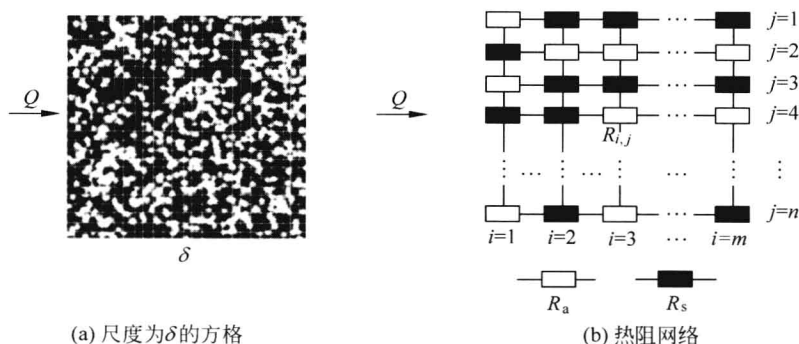


图 4-13 多孔材料及其热阻网络

## 3. 确定等效导热系数

图4-12中(a)与(b)图及图4-13(a)均是二维图形,表示泡沫铝多孔材料的一个方形截面上的孔隙分布。为了更清晰地表述,不妨认为它是一个宽为 $W$ 高为 $H$ 的矩形。实际上,它还应被理解为在垂直纸面上有一单位长度,也即长度 $L=1$ 。这样,上述二维图形实际表示着长为 $L$ 、宽为 $W$ 、高为 $H$ 的立方体内孔隙的分布。总之,任何物体在欧氏几何空间内都是三维的,不存在二维的物体,上

述图中的黑与白,即固相骨架与孔隙,不是平面的,只是它们在垂直纸面方向,即长度方向是不变的。从这个意义上讲,把沿垂直纸面方向(可以是三维空间内任意一个方向)各物理量不变化的三维物体视为二维物体。显然,这是对三维物体的一种简化。

确定图 4-13(a)二维物体等效导热系数  $\lambda_e$  需从确定该物体的热阻  $R$  着手。若材料宏观上各向异性,则应有纵向热阻  $R_L$  与横向热阻  $R_T$  的区别,这里讨论纵向热阻,也即在宽度方向的热阻  $R_L$ 。根据热阻的定义,可得

$$R_L = \frac{1}{\lambda_e} \times \frac{W}{H \times 1} \quad (4-3-27)$$

此式整理后为

$$\lambda_e = \frac{W}{R_L \times H \times 1} \quad (4-3-28)$$

若求得热阻  $R_L$ ,即由式(4-3-28)求得等效导热系数  $\lambda_e$ 。

将  $W \times H$  的矩形物体沿宽度方向划分成  $m$  等份,则该物体可视为高度都为  $H$ ,宽度都为  $W/m$ ,共计  $m$  个细高矩形叠加而成。也即,热阻  $R_L$  是  $m$  个细高矩形热阻  $R_i$  之和,如图 4-13(b)所示,则热阻  $R_L$  表示为

$$R_L = \sum_{i=1}^m R_i \quad (4-3-29)$$

每个细高矩形物体由  $n$  个单元组成(整个二维物体由  $m \times n$  个单元组成),一个单元对应着图 4-13(a)中的一个小方格,也是图 4-13(b)中黑或白的一个小方块。任意一个  $i$  细高矩形物体纵向热阻  $R_i$  由  $n$  个单元热阻  $R_{i,j}$  并联而成,即

$$\frac{1}{R_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{i,j}} = \frac{N_{s,i}}{R_s} + \frac{N_{\phi,i}}{R_a} \quad (4-3-30)$$

式(4-3-30)中第一个等号是热阻并联规则的体现。其中单元热阻  $R_{i,j}$  对应于黑、白两类单元,即表示固相的热阻  $R_s$  与表示气相的热阻  $R_a$ 。将相同的项合并,得到第二个等号所示的结果。由此表示,对任意一个  $i$  中有固相单元  $N_{s,i}$  个,气相(孔隙)单元  $N_{\phi,i}$  个,且它们之和为  $n$ ,即

$$N_{s,i} + N_{\phi,i} = n \quad (4-3-31)$$

将式(4-3-30)代入式(4-3-29),可得

$$R_L = \sum_{i=1}^m \frac{\frac{R_s}{N_{s,i}} \times \frac{R_a}{N_{\phi,i}}}{\frac{R_s}{N_{s,i}} + \frac{R_a}{N_{\phi,i}}} \quad (4-3-32)$$

其中  $R_s$  与  $R_a$  分别为

$$R_s = \frac{nW}{\lambda_s mH \times 1} \quad (4-3-33)$$

与

$$R_\phi = \frac{nW}{\lambda_\phi mH \times 1} \quad (4-3-34)$$

将式(4-3-33)与式(4-3-34)代入式(4-3-32),则有

$$\begin{aligned} R_L &= \frac{nW}{mH \times 1} \sum_{i=1}^m \frac{\frac{1}{N_{s,i}\lambda_s} \times \frac{1}{N_{\phi,i}\lambda_a}}{\frac{1}{N_{s,i}\lambda_s} + \frac{1}{N_{\phi,i}\lambda_a}} \\ &= \frac{nW}{mH \times 1} \sum_{i=1}^m \frac{1}{N_{s,i}\lambda_s + N_{\phi,i}\lambda_a} \end{aligned} \quad (4-3-35)$$

将式(4-3-35)代入式(4-3-28),经整理后为

$$\lambda_e = \frac{m}{n \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_s N_{s,i} + \lambda_a N_{\phi,i}}} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_s (1 - \phi_i) + \lambda_a \phi_i}} \quad (4-3-36)$$

其中

$$\phi_i = \frac{N_{\phi,i}}{n} \quad (4-3-37)$$

式(4-3-37)表示,对于图 4-13(a)所示物体任意一个  $i$  所对应的细高矩形,实际是高度为  $H$ 、宽度为  $W/m$ 、长度为  $L(L=1)$  的一薄片,其孔隙率为孔隙单元数  $N_{\phi,i}$  与该薄片总单元数  $n$  之比,将这个比值定义为图 4-13(a)所示物体在  $i$  处截面的面孔隙率。这样,式(4-3-36)表明,等效导热系数  $\lambda_e$  与  $\lambda_s$  和  $\lambda_a$  有关,还与孔隙率  $\phi_i$  分布有关。总之,在获得图 4-13(a)后,不难求得  $\phi_i$  的分布,由式(4-3-36)即可求得等效导热系数  $\lambda_e$ 。

图 4-13(a)所示物体的体孔隙率为



$$\phi = \frac{\sum_{i=1}^m N_{\phi,i}}{m \times n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \phi_i \quad (4-3-38)$$

式(4-3-38)的第一个等号是体孔隙率的定义,即孔隙单元的个数与全部单元数之比。第二个等式表示体孔隙率与面孔隙率的联系,等号表明,体孔隙率是面孔隙率的平均值。若假定面孔隙率等于体孔隙率,则式(4-3-36)就简化成

$$\lambda_e = (1 - \phi)\lambda_s + \phi\lambda_a \quad (4-3-39)$$

对照式(4-3-39)与式(4-3-5)发现,两者完全相同。式(4-3-39)中的 $\lambda_e$ 即为式(4-3-5)中的 $\lambda_L$ 。这一事实告诉我们,在预测材料等效导热系数方面,对于内部结构几何形状非规则的多孔材料,可应用分形理论,计算分形维数。若能用单一分形维数表示材料结构特征,假定体孔隙率等于面孔隙率,并用串并联原则,在这样的条件下,可将内部结构非规则的各向同性多孔材料视为简单的如图4-9(a)所示的并联网络。这一结果也为式(4-2-14)以及后续章节推导能量方程时假定导热系数为式(4-3-39)提供了一定理论依据。

关于不同孔隙率条件下闭孔泡沫铝的理论计算与实验研究文献[20]作了详尽的报道。

这里需要指出,应用串并联原则计算复杂结构材料的热阻是有条件的。对于不适用串并联原则的,可将等效导热系数表示成

$$\lambda_e = f(\lambda_s, \lambda_a, D_f) \quad (4-3-40)$$

这种表示形式可适用于更多类型的多孔材料,如图4-14所示的气相连续型、固相连续型以及气固相都连续等。

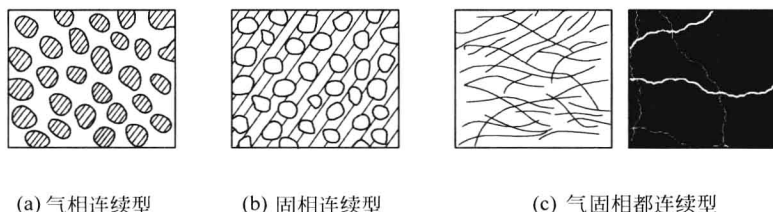


图 4-14 各类型多孔材料

综上所述,在讨论等效导热系数时,尽管各种数学模型的形式不同,但共同点是,在引入等效导热系数后把多孔材料简化为均质材料,把存在于多孔材料内复杂

的传热现象简化为单纯的热传导现象。

### 4.3.2 一维封闭孔隙多孔材料平板加热

这一节仅以举例形式介绍用等效导热系数方法对固气多孔材料平板进行传热计算。

#### 4.3.2.1 问题与已知条件

现有一固气多孔材料平板(如绝干木材),板的长度与宽度远大于板的厚度,板厚  $H=12\text{ mm}$ ,固相密度  $\rho_s=1530\text{ kg/m}^3$ ,比热容  $c_s=1.354\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ ,导热系数  $\lambda_s=0.5\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,孔隙率  $\phi=0.6$ ,孔隙内充满干空气,空气密度  $\rho_a=1.16\text{ kg/m}^3$ ,导热系数  $\lambda_a=0.03\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,比热容  $c_a=1.0\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ 。初始温度  $t_0=20^\circ\text{C}$ ,接受如图 4-1(b)所示的空气对流加热,环境空气温度  $t_e=200^\circ\text{C}$ ,环境空气对平板对流传热的表面传热系数  $h=12\text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$ (参见表 3-5)。显然,这是第三类边界条件的平板一维(厚度方向)导热。本问题是,在上述已知条件下,求平板温度变化,即求  $t(z, \tau)$ 。

#### 4.3.2.2 求解过程

运用等效导热系数法就是将不均匀的多孔材料视为均匀的材料,相应地得到等效后均匀材料的热物性参数如下:

密度  $\rho$

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_a \approx (1 - \phi)\rho_s = 612\text{ kg/m}^3$$

热容  $\rho c$

$$\rho c = (1 - \phi)\rho_s c_s + \phi\rho_a c_a \approx (1 - \phi)\rho_s c_s = 826\text{ kJ/(m}^3\cdot\text{K)}$$

导热系数:木材是各相异性材料,若假定平板上、下表面平行于木材纹理方向,也即木材纤维细胞胞管与平板上、下表面平行,则板内一维热流垂直于细胞胞管。为此,取式(4-3-22)作为等效导热系数,也即

$$\lambda = (1 - \sqrt{\phi})\lambda_s = 0.225\lambda_s = 0.112\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$$

在确定热容  $\rho c$  及等效导热系数  $\lambda$  后,导热方程(4-3-1)在图 4-1(b)第三类边界条件下的解即为第 2 章中式(2-3-46)。现将式(2-3-35)代入式(2-3-46),经整理后可得

$$t(z, \tau) = t_e - (t_e - t_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin(\mu_m)}{2\mu_m + \sin(2\mu_m)} \cos(\mu_m 2z/H) e^{-\frac{\mu_m^2 \lambda \tau}{\rho c H^2}} \quad (4-3-41)$$

式(4-3-41)中,时间 $\tau$ 与地点 $z$ 是自变量,温度 $t(z, \tau)$ 是因变量,其他各量均为参变量。这些参变量中,板厚 $H$ 是几何参数, $t_0$ 是初始参数, $t_e$ 是环境参数,等效导热系数 $\lambda$ 与比热容 $\rho c$ 是材料物性参数,在本算例中作为已知条件被给出且为常数。 $\mu_m$ 则是超越方程(2-3-41)的根。

$$\mu \tan \mu = Bi \quad (2-3-41)$$

式中 $Bi$ 数已由第2章中式(2-3-42)给出定义,本算例中为

$$Bi = \frac{hH}{2\lambda} = \frac{12 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 12 \times 10^{-3} \text{ m}}{2 \times 0.112 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 0.643$$

关于超越方程(2-3-41)的求解在历史上采用作图的办法,如图4-15所示,在确定的 $Bi$ 数条件下,求得一组 $\mu_m$ 。针对不同的 $Bi$ 值将求得的 $\mu_m$ 制作成数据表格供使用。

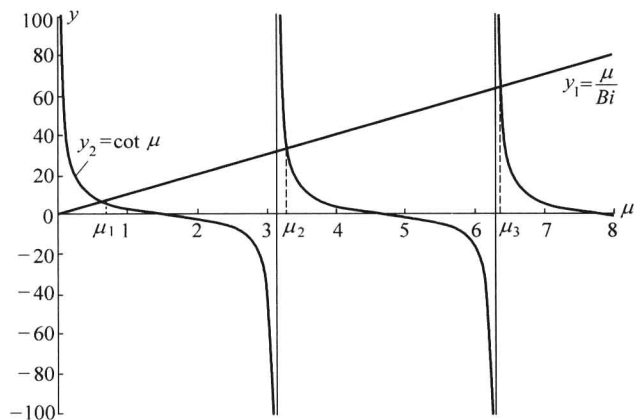


图 4-15 求超越方程(4-3-42)的根

在计算技术发达的今天,求解式(2-3-41)已变得很容易了,现介绍如下:  
将式(2-3-41)改写成

$$\frac{\mu}{Bi} = \cot \mu \quad (4-3-42)$$

令:  $y_1 = \frac{\mu}{Bi}$ ,  $y_2 = \cot \mu$ 。这里  $y_1$  是一条直线,  $y_2$  是以  $\pi$  为周期的余切曲线, 在一个周期内,  $y_1$  与  $y_2$  只有一个交点。  $\mu$  从 0 出发时,  $y_1 < y_2$ 。当  $\mu$  逐渐增加时,  $y_1$  随之增加而  $y_2$  随之减小, 当  $\mu$  增加至  $\mu = \mu_1$  时,  $y_1 = y_2$ , 即找到了第 1 个解  $\mu_1$ 。再让  $\mu$  从  $\mu = \pi$  出发, 逐渐增加, 再使  $y_1 = y_2$ , 找到第 2 个解  $\mu_2$ 。以此类推, 得到一系列  $\mu_m$ 。

将  $\mu_m$  与上述提及诸参数代入式(4-3-41)即可求得温度  $t(z, \tau)$ , 其结果显示在图 4-16 和图 4-17。将它们与图 2-12 和图 2-13 相比, 可见不同边界条件下温度响应的一致性 with 差异。

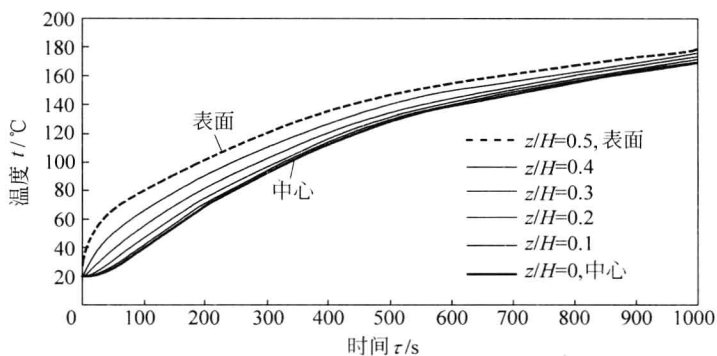


图 4-16 第三类边界条件下平板内若干地点温度随时间变化

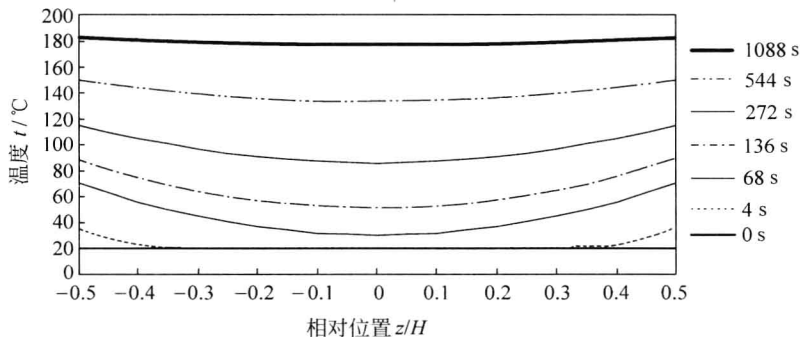


图 4-17 第三类边界条件下平板内温度分布

## 4.4 气体等温渗流

4.3 节所讨论的问题是固气多孔材料在加热时将存在于孔隙内的气体视为静止,将材料内传热过程简化为单纯热传导。本节则着重讨论固气多孔材料内孔隙间气体的流动,不计传热过程。也就是,材料与所处环境温度始终相同,只是由于固气多孔材料内气体压力与环境的压力不同所引起的气体流动及相应地气体压力与密度的变化。根据由简及繁原则,先讨论一维稳态等温渗流,再讨论一维与二维非稳态等温渗流。

### 4.4.1 一维稳态等温渗流

针对一维稳态等温渗流这一特定情形,图 4-7 所示的关于固气多孔材料传热传质问题的 7 个因变量中只保留关于空气速度  $u$  与空气压力  $p$  两个因变量,且速度  $u$  为常数。这样,这里所讨论的问题变成在空气速度  $u$  为常数条件下求空气压力  $p$  的分布。为此,将式(4-2-17)改写为

$$u = -\frac{K}{\eta} \frac{dp}{dx} \quad (4-4-1)$$

如图 4-2 所示,一块固气多孔材料平板置于两侧气体压力分别为  $p_1$  与  $p_2$  之间,  $\Delta p = p_1 - p_2$ ,在压力差  $\Delta p$  驱动下,板内气体流动,由此求板内气体压力  $p$  的分布及气流速度  $u$  的大小。这是典型一维稳态等温渗流问题。

为求板内压力分布,将式(4-4-1)中关于  $u$  的方程改写为

$$dp = -\frac{\eta}{K} u dx \quad (4-4-2)$$

对式(4-4-2)等号两边进行定积分,

$$\int_{p_1}^p dp = -\frac{\eta}{K} \int_0^x u dx$$

上式经运算后,

$$p = p_1 - \frac{\eta}{K} ux \quad (4-4-3)$$

式(4-4-3)显示了气体压力  $p$  在板内的变化。它从板的左侧( $x=0$ )的压力  $p_1$  开

始,随  $x$  线性地下降。让式(4-4-3)中的  $x=H, p=p_2$ , 经整理后可得

$$u = \frac{K}{\eta} \frac{p_1 - p_2}{H} \quad (4-4-4)$$

若已知板厚  $H=1\text{ cm}$ ,  $p_1$  与  $p_2$  之差为一个大气压, 即  $p_1 - p_2 = 10^5\text{ Pa}$ , 多孔材料的渗透率  $K=10^{-13}\text{ m}^2$ , 空气动力粘度  $\eta=18.6 \times 10^{-6}\text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。将这些已知条件代入式(4-4-4)即可求得气流速度  $u=53.76\text{ mm/s}$ 。

#### 4.4.2 一维非稳态等温渗流

一维非稳态等温渗流所要讨论的问题如图 4-18 所示。一块固气多孔材料平板, 初始时内部空气压力  $p_0$  大于环境空气压力  $p_e$ , 其上、下表面盖有覆盖板, 使空气无法从上、下表面与环境连通, 压力高于  $p_e$  的空气只能通过板的侧面流入环境。

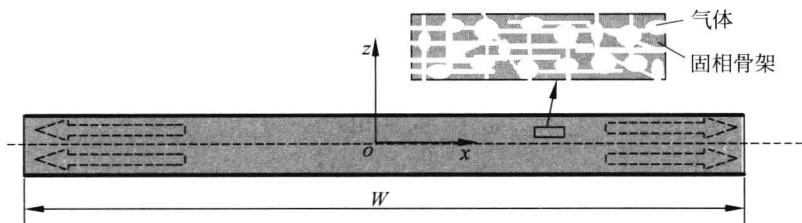


图 4-18 一维固气多孔材料非稳态等温渗流示意图

为便于分析, 不计沿板长度  $L$  方向(垂直于纸面的  $y$  方向)的流动, 只计沿板宽度  $W$  的  $x$  方向流动, 则问题简化为一维非稳态等温渗流。这里要回答的问题是, 板内空气压力怎样变化。更具体地说, 在板内空气向环境渗流过程中, 求板内空气的速度场  $u(x, \tau)$ 、空气的密度场  $\rho_a(x, \tau)$  与空气的压力场  $p(x, \tau)$ 。为此, 先写出控制方程与定解条件。

##### 4.4.2.1 控制方程

针对一维非稳态等温渗流这一情形, 图 4-7 所示的关于固气多孔材料传热传质问题的 7 个因变量将有所减少。由于等温条件, 温度  $t$  就不再作为因变量存在。由于沿  $x$  方向的一维渗流, 沿  $y$  与  $z$  方向的速度  $v$  与  $w$  不再出现了。多孔材料密度  $\rho$  理应是因变量, 但由于在固相骨架密度不变条件下, 它唯一取决于空气密度  $\rho_a$ , 而且  $\rho_a$  不再如图 4-7 所示影响温度  $t$ , 这样, 多孔材料密度  $\rho$  不再作为一个独立

的方程出现在耦合的方程组中。因此,7个因变量中只保留了关于空气速度  $u$ 、空气压力  $p$  与空气密度  $\rho_a$  三个因变量。它们相应地控制方程为

- (1) 空气速度  $u$  的动量方程(4-2-17);
- (2) 空气压力  $p$  的气体状态方程(4-2-20);
- (3) 空气密度  $\rho_a$  的质量守恒方程

$$\frac{\partial \phi \rho_a}{\partial \tau} = - \frac{\partial \rho_a u}{\partial x} \quad (4-4-5)$$

式(4-4-5)是式(4-2-7)在一维条件下的简化形式。

式(4-2-17)、式(4-2-20)及式(4-4-5)构成本问题的控制方程组。相应地定解条件为

(1) 几何条件:考虑到本问题所展示的物理现象,即空气速度、密度与压力对坐标轴  $z$  对称,故求解的几何域限定在平板的右半部分内( $0 \leq x \leq W/2$ ),也即,求解域为 $[0, W/2]$ 。

(2) 初始条件:空气速度  $u$  的初始值为 0,空气压力  $p$  的初始值  $p_0$ ,空气密度  $\rho_a$  的初始值可由  $p_0$  按式(4-2-20)算得  $\rho_{a0}$ 。因此,这里需给出初始温度,也即初始温度等于环境温度,  $t_0 = t_e$ 。

(3) 边界条件:由于空气速度  $u$  的分布对  $z$  轴对称,则在  $x=0$  处  $u=0$ 。对应于空气压力  $p$  的边界条件是给定环境空气压力为  $p_e$ ,供计算平板侧表面处空气速度用。对空气密度  $\rho_a$ ,无需给出相应地边界条件。

(4) 物理条件:本问题中的物理参数,孔隙率  $\phi$ 、渗透率  $K$  与空气动力粘度  $\eta$  均为常数。

综上所述,本问题包含 3 个因变量,对应 3 个控制方程,由它们构成的方程组是封闭的。根据相应地定解条件即可求得关于  $u$ 、 $\rho_a$  与  $p$  的唯一解,也即多孔平板内确定的空气速度场、密度场与压力场。

再一次指出,关于  $u$ 、 $\rho_a$  与  $p$  的 3 个方程,它们之间是相互耦合的,如图 4-19 所示。

在这个耦合的方程组中,任何一个方程都不能单独求解。正是这种耦合关系使它们难以用解析的方法进行求解,差分方程的数值方法将比较容易解决这一难点。

要得到对应于上述控制方程及定解条件的差分方程,首先需将求解区域离散化。

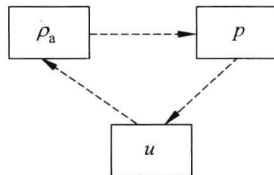


图 4-19 3 个因变量的耦合关系

#### 4.4.2.2 区域离散化

与讨论一维非稳态导热问题相似,将求解域 $[0, W/2]$ 划分成尺度(也称步长) $\Delta x$  相同的  $IX$  个单元,即  $W/2 = IX \times \Delta x$ 。对于每个单元可定义压力  $p$  与密度  $\rho_a$  分别为  $p_i$  与  $\rho_{a,i}$ ,  $i=1,2,\dots,IX$ 。每个单元对应一个节点,节点置于单元的中心,用符号圆圈标出,节点间的步长也为  $\Delta x$ ,如图 4-20 所示。

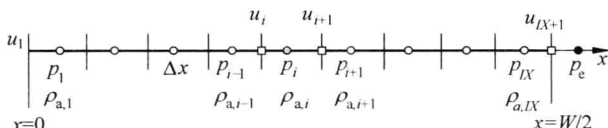


图 4-20 一维非稳态等温渗流的节点与单元网格

对空气速度  $u$  离散成  $u_i$  的处理方法有别于压力  $p_i$  与密度  $\rho_{a,i}$ , 它被定义在单元的边界上,其节点用小方框标出,如图 4-20 中  $u_i$  与  $u_{i+1}$  所示。这样,关于速度  $u$  的节点数目为  $IX+1$  个,比压力  $p$  与密度  $\rho$  节点数目多一个。从式(4-2-17)看到,速度  $u$  与压力  $p$  对  $x$  的一阶导数成正比,当一阶导数写成差分形式之后(见图 2-17),速度  $u$  应该在两个压力值  $p_{i-1}$  与  $p_i$  之间。因此,将  $u_i$  定义在两个压力单元的交界面上也是非常合理的。如果将压力与密度对应的单元所建立的网格系统称为主网格的话,则速度所对应的网格与主网格相差半个空间步长,称这种两套网格为交错网格<sup>[21-23]</sup>。

引入交错网格是保证计算多孔材料内流体速度取得成功的重要条件。

#### 4.4.2.3 差分方程

##### 1. 空气速度

空气速度  $u$  的式(4-2-17)相应地差分方程为

内单元:

$$u_i^{n+1} = -\frac{K}{\eta} \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta x} \quad i = 2, 3, \dots, IX \quad (4-4-6)$$

左边界:

$$u_i^{n+1} = 0 \quad i = 1 \quad (4-4-7)$$

这是边界条件在  $x=0$  处  $u=0$  的体现。



右边界:

$$u_i^{n+1} = -\frac{K}{\eta} \frac{p_e - p_{i-1}^n}{\Delta x} \quad i = IX + 1 \quad (4-4-8)$$

这是给定环境压力  $p_e$  作为边界条件的体现。

## 2. 空气密度

空气密度  $\rho_a$  的式(4-4-5)相应地差分方程可通过用差商代替微商的方法获得,即

内单元:

$$\phi \frac{\rho_{a,i}^{n+1} - \rho_{a,i}^n}{\Delta \tau} = \frac{\rho_{a,i-1}^n u_i^n - \rho_{a,i}^n u_{i+1}^n}{\Delta x} \quad (4-4-9)$$

经整理后即为

$$\rho_{a,i}^{n+1} = \rho_{a,i}^n + \frac{\Delta \tau}{\phi \Delta x} (\rho_{a,i-1}^n u_i^n - \rho_{a,i}^n u_{i+1}^n) \quad i = 1, 2, \dots, IX \quad (4-4-10)$$

关于空气密度  $\rho_a$  无需提供边界条件。但需指出,式(4-4-9)是针对速度  $u$  的方向已经清楚条件下得到的。

## 3. 空气压力

空气压力  $p$  的式(4-2-20)相应地差分方程为

$$p_i^{n+1} = \frac{\rho_{a,i}^{n+1} R T}{M_a} \quad (4-4-11)$$

式中,  $T = t_0 + 273.15$ 。

关于空气压力  $p$  也无需提供边界条件。 $p_i^{n+1}$  有另一表达形式,为

$$p_i^{n+1} = p_0 \frac{\rho_{a,i}^{n+1}}{\rho_{a0}}$$

上述式(4-4-6)、式(4-4-9)和式(4-4-11)中各物理量右上角的  $n$  与  $n+1$  分别表示各物理量处在当前时刻( $n$ )与经过一个时间步长  $\Delta \tau$  后的下一时刻( $n+1$ )。

综上所述,式(4-4-6)、式(4-4-7)、式(4-4-8)、式(4-4-10)和式(4-4-11)为本小节一维非稳态等温渗流问题的差分方程组。在方程组中,每个方程只有一个待求因变量,它有上标  $n+1$ ,表示待求其下一时刻的值,其他因变量的上标一般均为  $n$ ,即当前时刻的值,它们均已知,如上述式(4-4-6)、式(4-4-8)、式(4-4-10)。在式(4-4-11)中,待求因变量  $p_i^{n+1}$  出现在等号左边,在等号右边出现的  $\rho_{a,i}^{n+1}$  尽管其上标为  $n+1$ ,但  $\rho_{a,i}^{n+1}$  已通过式(4-4-10)求得,在式(4-4-11)中是作为已知量出现的。这样,使整个方程组中每个方程都呈显式。就方程组整体而言,其中各个方程

相互是耦合的,每一个因变量依赖其他因变量,但求解的每一步,方程间的耦合被解耦了。这正是使用数值方法求解方程组的优越性。总之,在初始条件给定后,即可由已知的当前时刻各物理量的值求得在区域 $[0, W/2]$ 内下一时刻各物理量的值。也就是,通过差分方程可求得固气多孔材料内空气速度场  $u_i^n$ 、密度场  $\rho_{a,i}^n$  与压力场  $p_i^n$ ,  $n=1, 2, \dots$ 。

需指出,在上述差分方程都表示成显式的格式后,把原本相互耦合的问题容易地被解耦了,但是,这种显式格式,对时间步长  $\Delta\tau$  与空间步长  $\Delta x$  的选取都很严格。

还需指出,上述差分方程式(4-4-9)是通过用差商代替微商由微分方程(4-4-5)得到的。其实,该差分方程还可通过控制容积法来建立。在很多情形下,控制容积法有显著的优点。见图 4-20 中单元  $i$ ,该单元在  $\Delta\tau$  时间内空气质量的增加(下式等号左边)等于  $\Delta\tau$  时间内通过单元边界流入的空气品质(下式等号右边),表示如下:

$$\phi(\rho_{a,i}^{n+1} - \rho_{a,i}^n)\Delta x = (\rho_{a,i-1}^n u_i^n - \rho_{a,i}^n u_{i+1}^n)\Delta\tau \quad (4-4-12)$$

将上式稍加整理即可获得式(4-4-9)。这里,  $\rho_{a,i-1}^n u_i^n \Delta\tau$  和  $\rho_{a,i}^n u_{i+1}^n \Delta\tau$  分别表示在  $\Delta\tau$  时间内通过单元  $i$  左边界流入单元与通过单元  $i$  右边界流出单元的空气品质。鉴于本节讨论的问题,是多孔材料平板内含有较高压力的空气通过平板右侧面向环境等温渗流,在等温渗流过程中,空气速度  $u$  始终沿  $x$  方向流动。在流动方向清楚的前提下,比较容易获得如式(4-4-9)的差分方程。然而,很多实际问题中,流动的方向不能事先确定,尽管仍可用差商代替微商的方法从数学上获得差分方程,但其完全可能违背实际物理过程。用控制容积法则比较容易建立适应流动方向不确定的差分方程。对此,在本章 4.5.2 节中有详尽介绍。

#### 4.4.2.4 控制方程的另一种形式

上述式(4-2-17)、式(4-2-20)及式(4-4-5)所构成的方程组也可合并成一个方程。为此,将式(4-4-5)改写成

$$\phi \frac{\partial \rho_a}{\partial \tau} = -\rho_a \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \rho_a}{\partial x}$$

将式(4-2-17)与式(4-2-20)代入上式,稍加整理后可得

$$\phi \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{K}{\eta} \left[ p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4-4-13)$$

这个关于压力  $p$  的方程与上述三个方程组成的方程组是等价的,对它进行差分处理所得到的差分方程与上述差分方程式(4-4-7)、式(4-4-8)、式(4-4-9)与

式(4-4-11)也是等价的。

#### 4.4.2.5 算例及计算结果讨论

本算例的已知条件有:板宽  $W=1\text{ m}$ ,材料内初始空气压力  $p_0=2\times 10^5\text{ Pa}$ ,多孔材料的孔隙率  $\phi=0.5$ ,渗透率  $K=10^{-13}\text{ m}^2$ ,空气动力粘度为  $\eta=18.6\times 10^{-6}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,取空间步长  $\Delta x=W/(2\times IX)=5\text{ cm}$ ,即右半平板内离散的单元数  $IX=10$ ,取时间步长  $\Delta\tau=0.01\text{ s}$ 。

按式(4-4-6)~式(4-4-8)、式(4-4-10)和式(4-4-11)计算得到空气速度  $u_i^n$ 、空气密度  $\rho_{a,i}^n$ 及空气压力  $p_i^n$ ,  $n=1,2,\dots$ 。现将计算结果显示在图 4-21、图 4-22 与图 4-23 中。

图 4-21 显示平板内不同地点空气速度  $u_i$  随时间的变化。由图可见,当初初始空气压力大于环境压力( $p_0 > p_e$ )的平板突然放入该环境后,除侧表面处( $x=0.5\text{ m}$ )的速度从最大值迅速下降外,内部各处的空气速度都经历由 0 逐渐加大待达到最大值后再缓慢下降的过程。各处所能达到的速度最大值从侧表面到中心由大变小。

若把图 4-21 中速度变化规律与第 2 章中图 2-14 所示一维非稳态导热中热流密度的变化规律进行对比,可以看到,它们两者曲线的走向非常相似。

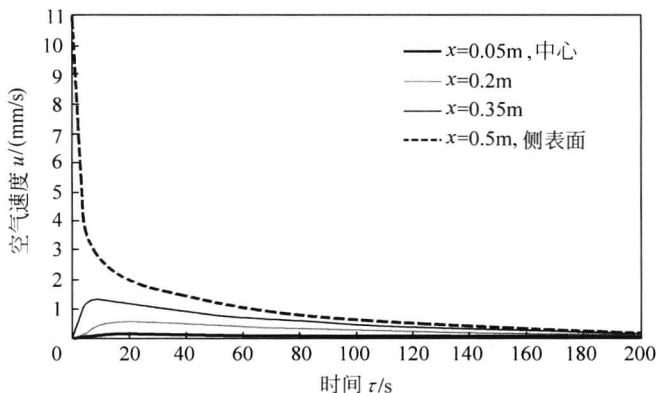


图 4-21 平板内不同地点空气速度随时间变化规律

图 4-22 显示平板内不同地点空气压力  $p_i$  随时间变化规律。由图可见,侧表面单元( $x=0.475\text{ m}$ )处的空气压力迅速下降,而处于中心( $x=0.025\text{ m}$ )处的空气压力则是先缓慢而后逐渐加快最后又趋于缓慢下降的过程。

图 4-23 是将平板内的地点作为横坐标,时间作为参变量绘制的空气压力分布

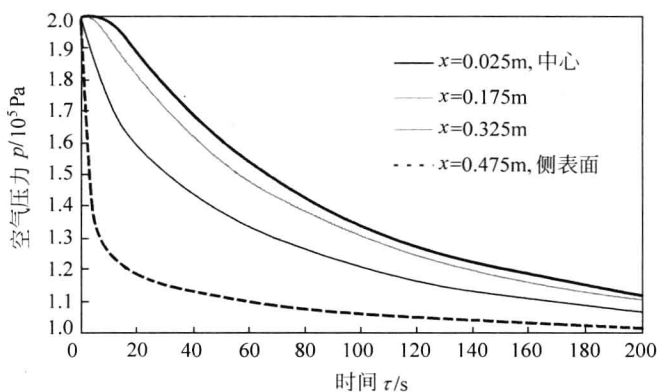


图 4-22 平板内不同地点空气压力随时间变化规律

随时间的变化。由图可见,空气压力的变化在开始阶段(如  $\tau=5\text{ s}$ ,  $\tau=10\text{ s}$  的曲线)主要在侧表面附近,而后(如  $\tau=20\text{ s}$ ,  $\tau=40\text{ s}$  的曲线)逐渐地表现在板的中心部位。总之,压力分布由初始比较陡峭而后变成逐渐平坦(如  $\tau=80\text{ s}$ ,  $\tau=120\text{ s}$ ,  $\tau=200\text{ s}$  的曲线)。

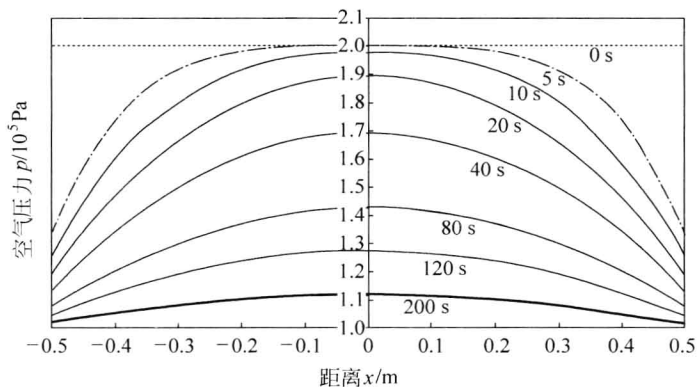


图 4-23 平板内空气压力的分布随时间变化

关于空气密度  $\rho_a$  的变化规律与压力  $p$  完全相似,这里不再用图线显示。

#### 4.4.3 二维非稳态等温渗流

本节所要讨论的二维非稳态等温渗流问题与 4.4.2 节相似,只是把图 4-18

中盖在平板上、下表面的盖板拿掉,如图 4-24。一块固气多孔材料内空气压力初始值为  $p_0$  的平板置于压力为  $p_e$  环境( $p_0 > p_e$ )后,平板内压力高于  $p_e$  的空气通过板的上、下表面与左、右侧面流入环境。仍不计沿板长度  $L$  方向(垂直纸面  $y$  方向)的流动,只计沿板宽度  $W$ (水平  $x$  方向)与厚度  $H$ (垂直  $z$  方向)流动,则问题归结为二维非稳态等温渗流。为此,图 4-7 所示 7 个因变量中保留  $u, w, \rho_a$  与  $p$  共 4 个因变量,也即寻求板内空气的速度场  $u(x, z, \tau)$  与  $w(x, z, \tau)$ 、空气密度场  $\rho_a(x, z, \tau)$  与空气压力场  $p(x, z, \tau)$ 。为此,先写出控制方程与定解条件。

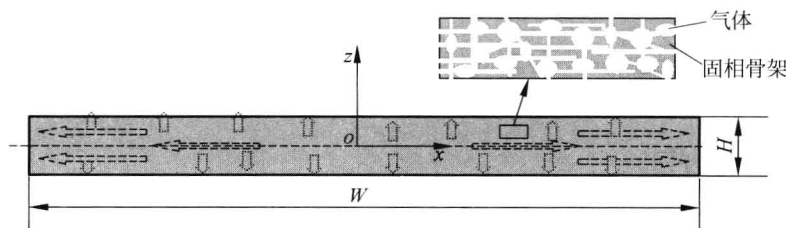


图 4-24 二维非稳态等温渗流示意图

#### 4.4.3.1 控制方程

空气速度  $u, w$ 、空气压力  $p$  与空气密度  $\rho_a$  此 4 个因变量相应地控制方程为

(1) 空气速度  $u$  与  $w$  的动量方程为式(4-2-17)与式(4-2-19);

(2) 空气压力  $p$  的气体状态方程为式(4-2-20);

(3) 空气密度  $\rho_a$  的质量守恒方程为

$$\frac{\partial \phi \rho_a}{\partial \tau} = - \frac{\partial \rho_a u}{\partial x} - \frac{\partial \rho_a w}{\partial z} \quad (4-4-14)$$

式(4-4-14)是式(4-2-7)在二维条件下的简化形式。

式(4-2-17)、式(4-2-19)、式(4-2-20)及式(4-4-14)构成本问题的封闭的控制方程组。相应地定解条件如下。

(1) 几何条件:考虑到本问题所展示的现象对坐标轴  $z$  与坐标轴  $x$  对称,故求解的几何域限定在从  $x=0$  到  $x=W/2$ ,从  $z=0$  到  $z=H/2$  四分之一的平板内。

(2) 初始条件:空气速度  $u$  与  $w$  的初始值为 0,空气压力  $p$  的初始值  $p_0$ ,大于环境压力  $p_e$ ,空气密度  $\rho_a$  的初始值可由  $p_0$  按式(4-2-20)算得  $\rho_{a0}$ 。因此,这里需给出初始温度,也即初始温度等于环境温度,  $t_0 = t_e$ 。

(3) 边界条件:空气速度  $u$  在  $x=0$  处为 0,  $w$  在  $z=0$  处为 0。空气压力  $p$  对应的环境空气压力为  $p_e$ ,供计算平板上表面及侧表面处空气速度  $u$  与  $w$  用。对空

气密度  $\rho_a$  无需给出相应地边界条件。

(4) 物理条件: 本问题中的物理参数为孔隙率  $\phi$ 、沿  $x$  方向渗透率  $K_x$ 、沿  $z$  方向渗透率  $K_z$  与空气动力粘度  $\eta$ 。

综上所述, 本问题涉及 4 个因变量, 对应 4 个控制方程, 由它们构成的方程组是封闭的。根据相应地定解条件即可求得一组关于  $u, w, \rho_a$  与  $p$  的唯一解, 也即多孔平板内确定的空气速度场、密度场与压力场。

因变量  $u, w, \rho_a$  与  $p$  的 4 个方程之间是相互耦合的, 如图 4-25 所示。

关于多孔材料密度  $\rho$  不再在因变量中列出, 其理由在 4.4.2 节中已有交代。

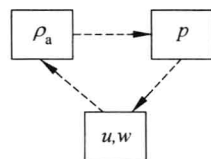


图 4-25 4 个因变量的耦合关系

#### 4.4.3.2 差分方程

对应于上述控制方程及定解条件, 可得到相应地差分方程。先讨论求解区域的离散化。

与讨论一维非稳态等温渗流问题相似, 将区域  $[0, W/2]$  划分成步长  $\Delta x$  相等的  $IX$  个单元, 即  $W/2 = IX \times \Delta x$ , 在此基础上, 再将区域  $[0, H/2]$  划分成步长  $\Delta z$  相等的  $JZ$  个单元, 即  $H/2 = JZ \times \Delta z$ 。这样, 在  $1/4$  平板的求解域内总计有单元数  $IX \times JZ$  个, 对于每个单元可定义压力  $p$  与密度  $\rho_a$  分别为  $p_{i,j}$  与  $\rho_{a,i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, IX; j = 1, 2, \dots, JZ$ 。

与用交错网络法来定义沿  $x$  方向速度  $u_{i,j}$  相同, 可定义沿  $z$  方向速度  $w_{i,j}$  如图 4-26。

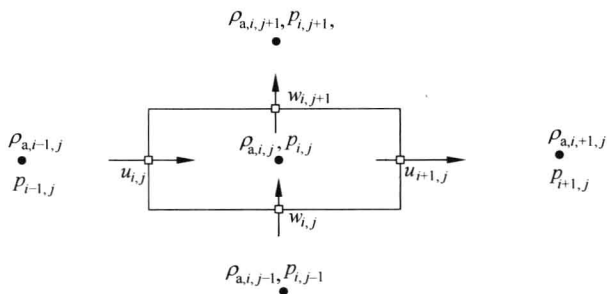


图 4-26 单个单元中空气密度、压力与速度

##### 1. 空气速度

空气速度  $u$  式(4-2-17) 相应地差分方程为

$$u_{i,j}^{n+1} = -\frac{K_x}{\eta} \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad i = 2, 3, \dots, IX; j = 1, 2, \dots, JZ \quad (4-4-15)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = 0 \quad i = 1; j = 1, 2, \dots, JZ \quad (4-4-16)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = -\frac{K_x}{\eta} \frac{p_e - p_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad i = IX + 1; j = 1, 2, \dots, JZ \quad (4-4-17)$$

空气速度  $w$  式(4-2-19) 相应地差分方程为

$$w_{i,j}^{n+1} = -\frac{K_z}{\eta} \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{\Delta z} \quad i = 1, 2, \dots, IX; j = 2, 3, \dots, JZ \quad (4-4-18)$$

$$w_{i,j}^{n+1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, IX; j = 1 \quad (4-4-19)$$

$$w_{i,j}^{n+1} = -\frac{K_z}{\eta} \frac{p_e - p_{i,j-1}^n}{\Delta z} \quad i = 1, 2, \dots, IX; j = JZ + 1 \quad (4-4-20)$$

## 2. 空气密度

空气密度  $\rho_a$  式(4-4-14)相应地差分方程为

$$\begin{aligned} \phi \frac{\rho_{a,i,j}^{n+1} - \rho_{a,i,j}^n}{\Delta \tau} &= \frac{\rho_{a,i-1,j}^n u_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n u_{i+1,j}^n}{\Delta x} \\ &+ \frac{\rho_{a,i,j-1}^n w_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n w_{i,j+1}^n}{\Delta z} \end{aligned} \quad (4-4-21)$$

式(4-4-21)经整理后为

$$\begin{aligned} \rho_{a,i,j}^{n+1} &= \rho_{a,i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{\phi} \left( \frac{\rho_{a,i-1,j}^n u_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n u_{i+1,j}^n}{\Delta x} + \frac{\rho_{a,i,j-1}^n w_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n w_{i,j+1}^n}{\Delta z} \right) \\ i &= 1, 2, \dots, IX; j = 1, 2, \dots, JZ \end{aligned} \quad (4-4-22)$$

这里需指出,由于图 4-24 所示求解域内空气渗流速度方向是清楚的,  $u$  与  $w$  总是流向坐标  $x$  与  $z$  的增长方向,故可得式(4-4-21)所示差分方程。如果  $u$  与  $w$  的流向不清楚,需要判断,则差分方程的书写就应顾及渗流的方向,详见 4.5.2 节。

## 3. 空气压力

关于空气压力  $p$  的式(4-2-20)相应地差分方程与式(4-4-11)相似,可写为

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{a,i,j}^{n+1} R T}{M_a} \quad (4-4-23)$$

式中,  $T = t_0 + 273.15$ 。

综上所述,式(4-4-15)~式(4-4-20)、式(4-4-22)和式(4-4-23)即为本小节

二维非稳态等温渗流问题的差分方程组。在初始条件给定后,即可由已知的当前时刻各物理量的值求得在区域  $0 < x < W/2$  和  $0 < z < H/2$  内下一时刻各物理量的值。也就是,通过差分方程可求得固气多孔材料内空气速度场、密度场与压力场。

#### 4.4.3.3 算例及计算结果讨论

本算例的已知条件有:板宽  $W=1\text{ m}$ ,板厚  $H=2\text{ cm}$ ,材料内初始空气压力  $p_0=2\times 10^5\text{ Pa}$ ,多孔材料的孔隙率  $\phi=0.5$ ,渗透率  $K_x=K_z=10^{-13}\text{ m}^2$ ,空气动力粘度  $\eta=18.6\times 10^{-6}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,取空间步长  $\Delta x=W/(2\times IX)=5\text{ cm}$  与  $\Delta z=H/(2\times JZ)=2\text{ mm}$ ,取时间步长  $\Delta\tau=0.01\text{ s}$ 。根据本节由4个控制方程式(4-2-17)、式(4-2-19)、式(4-2-20)及式(4-4-14)构成的定解问题而得到的由式(4-4-15)~式(4-4-17)、式(4-4-18)~式(4-4-20)、式(4-4-22)与式(4-4-23)组成的差分方程组可算得  $u_{i,j}^n, w_{i,j}^n, p_{i,j}^n$  与  $\rho_{a,i,j}^n, n=1,2,\dots$ 。其中,  $p_{i,j}^n$  与  $\rho_{a,i,j}^n$  在同一温度条件下一一对应,它们的变化规律相似。这里通过图4-27显示速度  $u_{i,j}^n$  与  $w_{i,j}^n$  在平板中心处 ( $i=2, j=2$ ) 及图4-28显示压力  $p_{i,j}^n$  在平板中心处 ( $i=1, j=1$ ) 的变化规律,扼要说明二维非稳态等温渗流的特点。

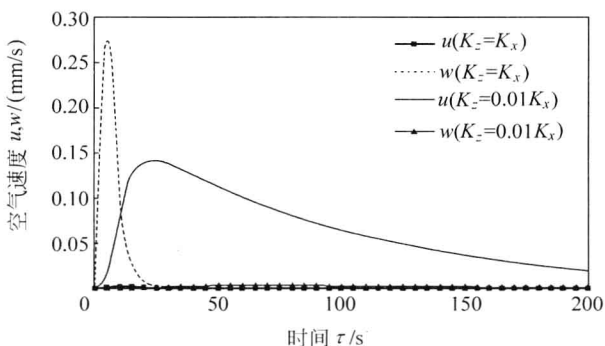


图 4-27 平板中心处  $u$  和  $w$  随时间变化

图4-27是平板中心处  $u$  和  $w$  随时间变化规律。当多孔材料平板为各向同性时,  $z$  方向的渗透率等于  $x$  方向的渗透率,  $K_z=K_x=10^{-13}\text{ m}^2$ , 则  $z$  方向的速度  $w$  远大于  $x$  方向的速度  $u$ 。而当多孔材料平板为各向异性,  $z$  方向的渗透率远小于  $x$  方向的渗透率,  $K_z=0.01K_x$ , 则  $z$  方向的速度  $w$  远小于  $x$  方向的速度  $u$ 。由此可见,对于二维问题,除了几何特征(宽度远大于厚度)之外,更重要的是材料的性能的方向性。例如,对于各向异性的木材,顺纹理方向与垂直纹理方向的渗透率的大小相差达3个数量级。所以,流体还是更容易沿纹理方向流动。



图 4-28 是平板中心处压力变化曲线。由图可见,在  $K_z = K_x$  条件下,中心压力迅速下降。这是因为,空气大量沿  $z$  方向从平板上、下表面流向环境。当  $K_z = 0.1K_x$  时,中心压力下降放缓,在  $K_z = 0.01K_x$  条件下,压力下降的行为与一维非稳态等温渗流(图 4-28 中 1-D)就很接近了。由此可见,在分析二维非稳态等温渗流问题时,如果  $K_z \ll K_x$ ,可视为沿  $x$  方向的一维非稳态等温渗流问题。

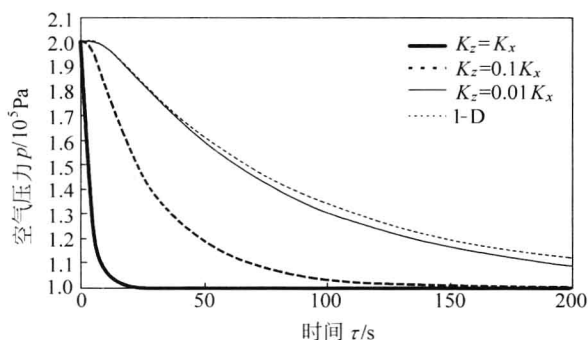


图 4-28 平板中心处空气压力随时间变化

## 4.5 固气多孔材料热板加热

本节是在 4.3 节讨论多孔材料热传导及在 4.4 节讨论等温渗流基础上,把两者结合起来,讨论孔隙连通的固气多孔材料的加热,如图 4-29 所示。

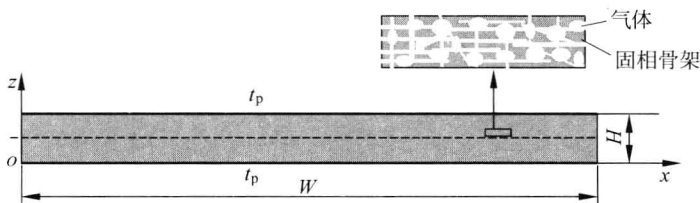


图 4-29 二维固气多孔材料热板加热示意图

当上、下两块热板同时与固气多孔材料平板紧紧相接触时,热板对材料加热。与此同时,引起材料内各处孔隙中的空气压力有不同程度的升高,进而引起空气由高压处向低压处流动。空气的流动使材料内的传热过程在热传导的基础上又增添了热对流。由此,材料内部既有温度场又有空气的压力场、空气的密度场及空气速

度场。本节介绍这一问题的控制方程与定解条件,相应差分方程及其求解,最终举例演示温度场与空气压力、密度及速度场。

#### 4.5.1 控制方程及定解条件

本问题涉及的因变量,除了 4.4.3 节中关于二维等温非稳态渗流中的空气速度  $u$ 、 $w$ 、空气压力  $p$  与空气密度  $\rho_a$  这 4 个因变量之外,应加上因变量多孔材料密度  $\rho$  与温度  $t$ ,共计 6 个因变量。它们相应地控制方程为:

- (1) 空气速度  $u$  与  $w$  的动量方程式(4-2-17)与式(4-2-19);
- (2) 空气压力  $p$  的气体状态方程式(4-2-20);
- (3) 空气密度  $\rho_a$  的质量守恒方程式(4-4-14);
- (4) 多孔材料密度  $\rho$  的定义式(4-2-8);
- (5) 温度  $t$  的能量守恒方程

$$\frac{\partial \rho c t}{\partial \tau} = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \rho_a c_a u t}{\partial x} + \frac{\partial \rho_a c_a w t}{\partial z} \right) \quad (4-5-1)$$

式(4-5-1)是式(4-2-15)在二维条件下的简化,其中导热系数  $\lambda$  与热容  $\rho c$  如式(4-2-14)与式(4-2-15)。

式(4-2-17)、式(4-2-19)、式(4-2-20)、式(4-2-8)、式(4-4-14)及式(4-5-1)构成本问题封闭的控制方程组。相应地定解条件如下。

(1) 几何条件: 本问题坐标原点设在材料平板的左下角(见图 4-29),故求解的几何域限定在  $0 \leq x \leq W$  和  $0 \leq z \leq H$  整个平板内。这里是一块二维平板,不计各物理量沿平板长度  $y$  方向的变化。

(2) 初始条件: 空气速度  $u$  与  $w$  的初始值为 0, 平板材料温度  $t$  的初始值  $t_0$  与平板周围环境的温度  $t_e$  相同,即  $t = t_0 = t_e$ 。空气压力  $p$  的初始值  $p_0$ , 它与平板周围环境的压力  $p_e$  相同,即  $p = p_0 = p_e$ 。空气密度  $\rho_a$  的初始值可由  $p_0$  与  $t_0$  按气体状态方程(4-2-20)求得,  $\rho_a = \rho_{a0}$ 。

(3) 边界条件: 对于空气速度  $u$ , 需提供空气环境压力  $p_e$ , 为计算平板侧表面处空气速度。对于空气速度  $w$ , 在  $z=0$  与  $z=H$  处  $w=0$ 。对于空气压力  $p$  与空气密度  $\rho_a$  无需单独提供边界条件。对于温度  $t$ , 其边界条件为

$$x = 0 \quad h(t_e - t) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \quad (4-5-2)$$

$$x = W \quad h(t_e - t) = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \quad (4-5-3)$$

$$z = 0 \quad t = t_p \quad (4-5-4)$$

$$z = H \quad t = t_p \quad (4-5-5)$$

式中,  $t_p$  是上、下热板温度, 它为常数;  $h$  是材料平板侧面与相邻环境空气之间的自然对流表面传热系数。

(4) 物理条件: 渗透率为常数,  $K = K_x = K_z$ , 导热系数是常数,  $\lambda = \lambda_x = \lambda_z$ , 固相骨架密度  $\rho_s$  与比热容  $c_s$ 、空气比热容  $c_a$  均为常数, 动力粘度  $\eta$  为温度的函数。

综上所述, 本问题涉及 6 个因变量, 对应应有 6 个控制方程, 由它们构成的方程组是封闭的。根据相应地定解条件即可求得关于  $u$ 、 $w$ 、 $\rho_a$ 、 $p$ 、 $\rho$  与  $t$  的唯一解, 也即多孔平板内确定的空气速度场、密度场、压力场以及多孔材料的密度场与温度场。

因变量  $u$ 、 $w$ 、 $\rho_a$ 、 $p$ 、 $\rho$  与  $t$  对应的 6 个方程, 它们之间相互耦合, 上述这 6 个因变量相互间的耦合关系与图 4-7 相同。

## 4.5.2 差分方程

对应于上述控制方程及定解条件, 可得到相应地差分方程。在推导差分方程前, 先讨论求解区域的离散化, 然后逐个讨论空气速度  $u$  与  $w$ 、空气密度  $\rho_a$ 、多孔材料密度  $\rho$  与温度  $t$  以及空气压力  $p$  的差分方程。

### 4.5.2.1 区域离散化

将求解区域  $0 \leq x \leq W, 0 \leq z \leq H$  划分成几何尺寸完全相同的有限个单元, 如图 4-30 所示。单元的宽与高均为  $\Delta x$  与  $\Delta z$ , 且平板的宽度  $W = IX \times \Delta x$ , 高度  $H = JZ \times \Delta z$ 。这样, 平板总计有单元数为  $IX \times JZ$  个, 单元对应的节点都位于单元的中央, 在图 4-30 与图 4-31 中用黑色小圆圈标出。对于每个单元可定义空气压力  $p$  与密度  $\rho_a$ , 以及多孔材料密度  $\rho$  与温度  $t$ , 分别为  $p_{i,j}$ 、 $\rho_{a,i,j}$ 、 $\rho_{i,j}$  与  $t_{i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, IX; j = 1, 2, \dots, JZ$ 。

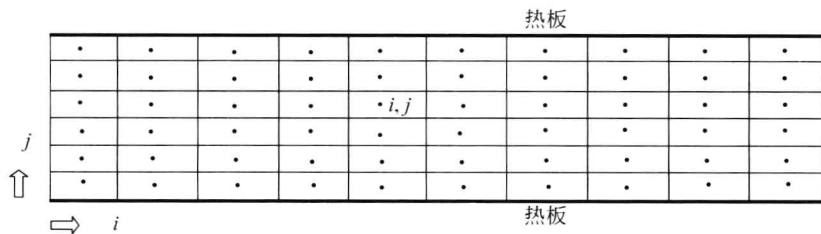


图 4-30 二维固气多孔材料平板离散化单元与节点

用交错网格法来定义沿  $x$  方向速度  $u_{i,j}$  与沿  $z$  方向速度  $w_{i,j}$ , 如图 4-31 所示。这样,  $u_{i,j}$  对应的节点数为  $IX+1$ ,  $w_{i,j}$  对应的节点数为  $JZ+1$ 。速度节点的位置在单元的边界上, 用小方框标出。

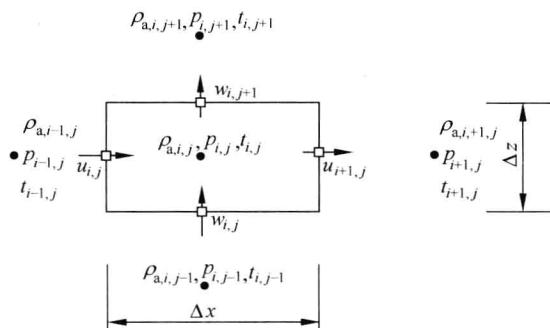


图 4-31 单个离散单元中温度、压力、密度与速度

#### 4.5.2.2 空气速度的差分方程

关于速度  $u$  与  $w$  的差分方程基本上与 4.4.3 节是相同的。区别之处是, 这里考虑了空气粘度随温度变化。

速度  $u$  的方程(4-2-17) 所相应地差分方程为

内部单元:

$$u_{i,j}^{n+1} = -\frac{K}{\eta_{i,j}} \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad i = 2, 3, \dots, IX; j = 1, 2, \dots, JZ \quad (4-5-6)$$

左边界:

$$u_{i,j}^{n+1} = -\frac{K}{\eta_{i,j}} \frac{p_{i,j}^n - p_e}{\Delta x} \quad i = 1; j = 1, 2, \dots, JZ \quad (4-5-7)$$

右边界:

$$u_{i,j}^{n+1} = -\frac{K}{\eta_{i,j}} \frac{p_e - p_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad i = IX + 1; j = 1, 2, \dots, JZ \quad (4-5-8)$$

由于空气动力粘度  $\eta$  是温度的函数, 为此,  $\eta_{i,j} = \frac{1}{2}[\eta(t_{i,j}) + \eta(t_{i-1,j})]$ , 表示流体从单元  $i-1$  流到单元  $i$  时所具有的动力粘度是温度为  $t_{i-1,j}$  与  $t_{i,j}$  的粘度的

算术平均值。在式(4-5-7)与式(4-5-8)中的  $\eta_{i,j}$  则取边界单元温度对应下的  $\eta$  的值。

速度  $w$  的方程(4-2-19)所相应地差分方程为

内部单元:

$$w_{i,j}^{n+1} = -\frac{K_z}{\eta_{i,j}} \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{\Delta z} \quad i = 1, 2, \dots, IX; j = 2, 3, \dots, JZ \quad (4-5-9)$$

其中,  $\eta_{i,j} = \frac{1}{2} [\eta(t_{i,j}) + \eta(t_{i,j-1})]$

下边界:

$$w_{i,j}^{n+1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, IX; j = 1 \quad (4-5-10)$$

上边界:

$$w_{i,j}^{n+1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, IX; j = JZ + 1 \quad (4-5-11)$$

#### 4.5.2.3 空气密度的差分方程

根据微分方程式(4-4-14),可得

$$\frac{\Delta \phi \rho_a}{\Delta \tau} = -\frac{\Delta \rho_a u}{\Delta x} - \frac{\Delta \rho_a w}{\Delta z} \quad (4-5-12)$$

式(4-5-12)经整理后为

$$\begin{aligned} \rho_{a,i,j}^{n+1} &= \rho_{a,i,j}^n - \frac{\Delta \tau}{\phi} \left( \frac{\Delta \rho_a u}{\Delta x} + \frac{\Delta \rho_a w}{\Delta z} \right) \\ i &= 1, 2, \dots, IX; j = 1, 2, \dots, JZ \end{aligned} \quad (4-5-13)$$

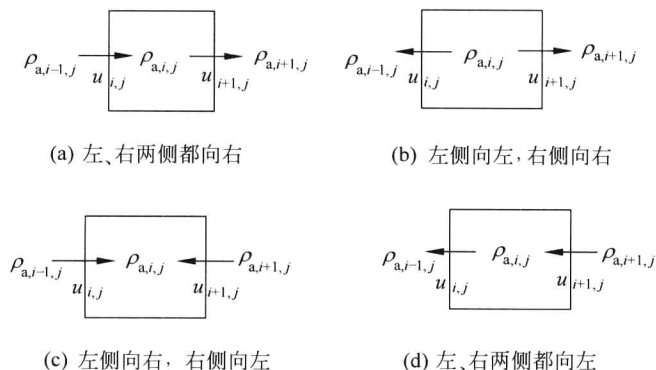
式(4-5-13)中的一  $\frac{\Delta \rho_a u}{\Delta x}$  表示单位时间内沿  $x$  方向流入单位体积的空气质量。其差分形式应视  $u$  的方向不同而不同,可按如图 4-32 所示(a)、(b)、(c)与(d)四种情形进行分析。

情形(a)

$$-\Delta \rho_a u = \rho_{a,i-1,j}^n u_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n u_{i+1,j}^n \quad (4-5-14)$$

情形(b)

$$-\Delta \rho_a u = \rho_{a,i,j}^n u_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n u_{i+1,j}^n \quad (4-5-15)$$

图 4-32 水平方向对流项  $-\Delta\rho_a u$  的差分处理

情形(c)

$$-\Delta\rho_a u = \rho_{a,i-1,j}^n u_{i,j}^n - \rho_{a,i+1,j}^n u_{i+1,j}^n \quad (4-5-16)$$

情形(d)

$$-\Delta\rho_a u = \rho_{a,i,j}^n u_{i,j}^n - \rho_{a,i+1,j}^n u_{i+1,j}^n \quad (4-5-17)$$

式(4-5-13)中的  $-\frac{\Delta\rho_a w}{\Delta z}$ , 表示单位时间内沿  $z$  方向流入单位空间的空气质量。

其差分形式应视  $w$  的方向不同而不同, 可按如图 4-33 所示(a)、(b)、(c)与(d)四种情形进行分析。

情形(a)

$$-\Delta\rho_a w = \rho_{a,i,j-1}^n w_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n w_{i,j+1}^n \quad (4-5-18)$$

情形(b)

$$-\Delta\rho_a w = \rho_{a,i,j}^n w_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n w_{i,j+1}^n \quad (4-5-19)$$

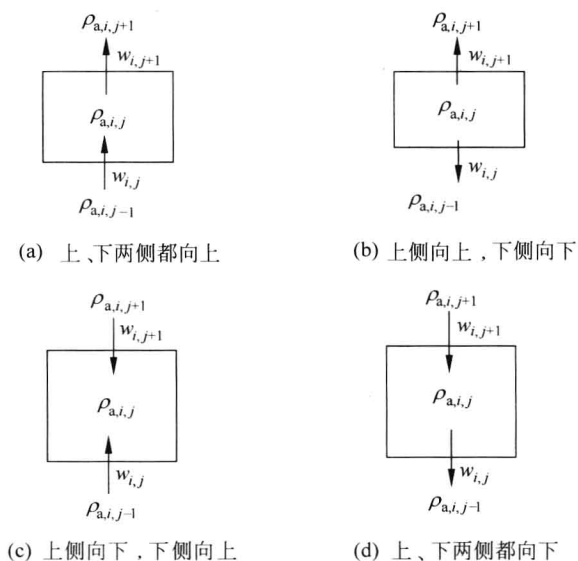
情形(c)

$$-\Delta\rho_a w = \rho_{a,i,j-1}^n w_{i,j}^n - \rho_{a,i,j+1}^n w_{i,j+1}^n \quad (4-5-20)$$

情形(d)

$$-\Delta\rho_a w = \rho_{a,i,j}^n w_{i,j}^n - \rho_{a,i,j+1}^n w_{i,j+1}^n \quad (4-5-21)$$

综上所述, 空气密度  $\rho_a$  的差分方程式(4-5-13)~式(4-5-21)是通过微分方

图 4-33 垂直方向对流项  $-\Delta \rho_a w$  的差分处理

程(4-4-14)进行差分处理获得的。其实,这些差分方程也可用控制容积法对图 4-31 所示的单元直接建立关于气体质量平衡的代数方程来获得,所得最终结果相同。

#### 4.5.2.4 多孔材料密度的差分方程

根据多孔材料密度  $\rho$  的定义式(4-2-8),可得

$$\rho_{i,j}^{n+1} = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_{a,i,j}^{n+1} \quad (4-5-22)$$

由式(4-5-22)可见,在固相骨架密度  $\rho_s$  为常数条件下,多孔材料密度  $\rho_{i,j}^{n+1}$  的变化唯一取决于空气密度  $\rho_{a,i,j}^{n+1}$  的变化。

#### 4.5.2.5 温度的差分方程

关于温度的差分方程可以通过对微分方程(4-5-1)进行差分处理来获得,也可用控制容积的方法。这里,我们用控制容积法来推导对应于微分方程(4-5-1)的差分方程。如图 4-30 所示,全部  $IX \times JZ$  个单元可分为两类。一类是内单元,这些单元相邻的都是平板内其他单元。另一类是边界单元,这些单元的 4 个边界中至少有一边不与平板内其他单元相邻。边界单元中又可分两类,一类是上、下边

界单元,它们与热板直接接触;另一类是左、右两侧边界单元,它们与环境空气相邻。除此之外,两个边界相交的角单元。下面分别就内单元,上、下边界单元与左、右边界单元以及角单元介绍它们的差分方程。

### 1. 内单元

视图 4-31 为一控制容积,或称控制单元,对它建立能量平衡关系如下:

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{t_{i-1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_{i+1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_{i,j-1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x + \lambda \frac{t_{i,j+1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x \\ & - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta z - \Delta(\rho_a c_a w t) \Delta x = \frac{(\rho c t_{i,j})^{n+1} - (\rho c t_{i,j})^n}{\Delta \tau} \Delta x \Delta z \\ & i = 2, 3, \dots, IX - 1; j = 2, 3, \dots, JZ - 1 \end{aligned}$$

上式等号左边前 4 项,表示该单元在单位时间内通过单元的 4 个边界以热传导方式传入该单元的热量,其中前两项与后两项分别为沿  $x$  与沿  $z$  方向进入单元的。上式等号左边第 5、6 项,表示该单元在单位时间内通过单元的 4 个边界以热对流方式到达该单元的热量,第 5 与第 6 项分别为沿  $x$  与沿  $z$  方向进入单元的。由于热量以对流方式进入,它们的差分表示与空气速度  $u$  与  $w$  的方向有关,下面将给予详细说明。等号右边表示该单元在单位时间内能量的增加,该能量的增加由两个因素引起,一是温度  $t$  的变化,另一是材料热容  $\rho c$  的变化,为便于计算,假定:  $(\rho c t_{i,j})^{n+1} - (\rho c t_{i,j})^n = (\rho c)^{n+1} (t_{i,j}^{n+1} - t_{i,j}^n)$ 。现将上述能量平衡关系式重新整理,可得

$$\begin{aligned} t_{i,j}^{n+1} = & \left[ \lambda \frac{t_{i-1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_{i+1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_{i,j-1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x \right. \\ & + \lambda \frac{t_{i,j+1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta z \\ & \left. - \Delta(\rho_a c_a w t) \Delta x \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta x \Delta z} + t_{i,j}^n \end{aligned} \quad (4-5-23)$$

式中,表示对流项的  $-\Delta \rho_a c_a u t$  与  $-\Delta \rho_a c_a w t$  其具体表示与上述式(4-5-14)~式(4-5-21)相仿,应按图 4-32 与图 4-33 所示的各四种情形予以准确表示。

关于  $-\Delta \rho_a c_a u t$ :

情形(a)

$$-\Delta \rho_a c_a u t = \rho_{a,i-1,j}^n c_a t_{i-1,j}^n u_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n c_a t_{i,j}^n u_{i+1,j}^n \quad (4-5-24)$$

情形(b)

$$-\Delta \rho_a c_a u t = \rho_{a,i,j}^n c_a t_{i,j}^n u_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n c_a t_{i,j}^n u_{i+1,j}^n \quad (4-5-25)$$



情形(c)

$$-\Delta\rho_a c_a u t = \rho_{a,i-1,j}^n c_a t_{i-1,j}^n u_{i,j}^n - \rho_{a,i+1,j}^n c_a t_{i+1,j}^n u_{i+1,j}^n \quad (4-5-26)$$

情形(d)

$$-\Delta\rho_a c_a u t = \rho_{a,i,j}^n c_a t_{i,j}^n u_{i,j}^n - \rho_{a,i+1,j}^n c_a t_{i+1,j}^n u_{i+1,j}^n \quad (4-5-27)$$

关于 $\nabla\Delta\rho_a c_a w t$ :

情形(a)

$$-\Delta\rho_a c_a w t = \rho_{a,i,j-1}^n c_a t_{i,j-1}^n w_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n c_a t_{i,j}^n w_{i,j+1}^n \quad (4-5-28)$$

情形(b)

$$-\Delta\rho_a c_a w t = \rho_{a,i,j}^n c_a t_{i,j}^n w_{i,j}^n - \rho_{a,i,j}^n c_a t_{i,j}^n w_{i,j+1}^n \quad (4-5-29)$$

情形(c)

$$-\Delta\rho_a c_a w t = \rho_{a,i,j-1}^n c_a t_{i,j-1}^n w_{i,j}^n - \rho_{a,i,j+1}^n c_a t_{i,j+1}^n w_{i,j+1}^n \quad (4-5-30)$$

情形(d)

$$-\Delta\rho_a c_a w t = \rho_{a,i,j}^n c_a t_{i,j}^n w_{i,j}^n - \rho_{a,i,j+1}^n c_a t_{i,j+1}^n w_{i,j+1}^n \quad (4-5-31)$$

## 2. 上、下边界单元

(1) 上边界单元( $j=JZ$ )是材料平板上表面与热板紧密接触的单元,它们与内单元差分方程的差别只是用 $t_p$ 替代 $t_{i,j+1}$ ,且相应地用 $\Delta z/2$ 替代 $\Delta z$ ,因为热板与上表面单元所对应节点的间距为 $\Delta z/2$ 。这样,上边界单元差分方程为

$$\begin{aligned} t_{i,j}^{n+1} = & \left[ \lambda \frac{t_{i-1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_{i+1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_{i,j-1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x \right. \\ & + \lambda \frac{t_p - t_{i,j}^n}{\Delta z/2} \Delta x - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta z \\ & \left. - \Delta(\rho_a c_a w t) \Delta x \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta x \Delta z} + t_{i,j}^n \\ & i = 2, 3, \dots, IX-1; j = JZ \end{aligned} \quad (4-5-32)$$

(2) 下边界单元( $j=1$ )与上边界单元相仿,其与内单元差分方程的差别只是用 $t_p$ 替代 $t_{i,j-1}$ ,且相应地用 $\Delta z/2$ 替代了 $\Delta z$ ,所得差分方程为

$$\begin{aligned} t_{i,j}^{n+1} = & \left[ \lambda \frac{t_{i-1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_{i+1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_p - t_{i,j}^n}{\Delta z/2} \Delta x \right. \\ & \left. + \lambda \frac{t_{i,j+1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta z \right] \end{aligned}$$

$$- \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta x \Big] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta x \Delta z} + t_{i,j}^n$$

$$i = 2, 3, \dots, IX - 1; j = 1 \quad (4-5-33)$$

边界(上、下与左、右以及角)单元方程中所包含的对流项与内单元中相同,仍可用上述式(4-5-24)~式(4-5-31)表示。

### 3. 左、右边界单元

(1) 左边界单元( $i=1$ )是材料平板左侧面与环境相邻的单元,其与内单元差分方程的差别只是来自左边的热传导项  $\lambda \frac{t_{i-1,j} - t_{i,j}}{\Delta x} \Delta z$  用对流传热项  $h(t_e - t_{i,j}) \Delta z$  替代,则差分方程为

$$t_{i,j}^{n+1} = \left[ h(t_e - t_{i,j}^n) \Delta z + \lambda \frac{t_{i+1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_{i,j-1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x \right. \\ \left. + \lambda \frac{t_{i,j+1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta z \right. \\ \left. - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta x \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta x \Delta z} + t_{i,j}^n$$

$$i = 1; j = 2, 3, \dots, JZ - 1 \quad (4-5-34)$$

(2) 右边界单元( $i=IX$ )是材料平板右侧面与环境相邻的单元,其与内单元差分方程的差别只是来自右边的热传导项  $\lambda \frac{t_{i+1,j} - t_{i,j}}{\Delta x} \Delta z$  用对流传热项  $h(t_e - t_{i,j}) \Delta z$  替代,则差分方程为

$$t_{i,j}^{n+1} = \left[ \lambda \frac{t_{i-1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + h(t_e - t_{i,j}^n) \Delta z + \lambda \frac{t_{i,j-1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x \right. \\ \left. + \lambda \frac{t_{i,j+1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta z \right. \\ \left. - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta x \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta x \Delta z} + t_{i,j}^n$$

$$i = IX; j = 2, 3, \dots, JZ - 1 \quad (4-5-35)$$

### 4. 角单元

角单元是上、下边界与左、右边界两种边界单元的结合。因此可得左上、左下、右上及右下共四个角单元。

(1) 左上角单元( $i=1, j=JZ$ ),它是左边界单元与上边界单元的结合,该单元的差分方程为

$$\begin{aligned}
 t_{i,j}^{n+1} = & \left[ h(t_e - t_{i,j}^n) \Delta z + \lambda \frac{t_{i+1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_{i,j-1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x \right. \\
 & + \lambda \frac{t_p - t_{i,j}^n}{\Delta z/2} \Delta x - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta z \\
 & \left. - \Delta(\rho_a c_a w t) \Delta x \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta x \Delta z} + t_{i,j}^n
 \end{aligned} \quad (4-5-36)$$

(2) 左下角单元( $i=1, j=1$ ), 它是左边界单元与下边界单元的结合, 该单元的差分方程为

$$\begin{aligned}
 t_{i,j}^{n+1} = & \left[ h(t_e - t_{i,j}^n) \Delta z + \lambda \frac{t_{i+1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + \lambda \frac{t_p - t_{i,j}^n}{\Delta z/2} \Delta x \right. \\
 & + \lambda \frac{t_{i,j+1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta z \\
 & \left. - \Delta(\rho_a c_a w t) \Delta x \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta x \Delta z} + t_{i,j}^n
 \end{aligned} \quad (4-5-37)$$

(3) 右上角单元( $i=IX, j=JZ$ ), 它是右边界单元与上边界单元的结合, 该单元的差分方程为

$$\begin{aligned}
 t_{i,j}^{n+1} = & \left[ \lambda \frac{t_{i-1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + h(t_e - t_{i,j}^n) \Delta z + \lambda \frac{t_{i,j-1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x \right. \\
 & + \lambda \frac{t_p - t_{i,j}^n}{\Delta z/2} \Delta x - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta z \\
 & \left. - \Delta(\rho_a c_a w t) \Delta x \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta x \Delta z} + t_{i,j}^n
 \end{aligned} \quad (4-5-38)$$

(4) 右下角单元( $i=IX, j=1$ ), 它是右边界单元与下边界单元的结合, 该单元的差分方程为

$$\begin{aligned}
 t_{i,j}^{n+1} = & \left[ \lambda \frac{t_{i-1,j}^n - t_{i,j}^n}{\Delta x} \Delta z + h(t_e - t_{i,j}^n) \Delta z + \lambda \frac{t_p - t_{i,j}^n}{\Delta z/2} \Delta x \right. \\
 & + \lambda \frac{t_{i,j+1}^n - t_{i,j}^n}{\Delta z} \Delta x - \Delta(\rho_a c_a u t) \Delta z \\
 & \left. - \Delta(\rho_a c_a w t) \Delta x \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta x \Delta z} + t_{i,j}^n
 \end{aligned} \quad (4-5-39)$$

上述由式(4-5-23)、式(4-5-32)~式(4-5-39)连同式(4-5-24)~式(4-5-31)构成温度  $t$  的差分方程, 它们可统一写成如下形式:

$$t_{i,j}^{n+1} = A_w t_{i-1,j}^n + A_E t_{i+1,j}^n + A_D t_{i,j-1}^n + A_U t_{i,j+1}^n + C_A t_{i,j}^n + D_A \quad (4-5-40)$$

式(4-5-40)表明,对材料平板每个内部单元在某一时刻的温度都可表示为它周围四边相邻单元及自身单元前一时刻温度的线性组合, $D_A=0$ 。对于与环境相邻的边界单元,则系数 $A_W$ 、 $A_E$ 、 $A_U$ 、 $A_D$ 需作适当修正,而 $C_A$ 以及自由项 $D_A$ 有很大改变以反映环境条件对边界单元温度的影响。

对照式(4-5-40)与前述差分方程,可得到不同条件下式(4-5-40)中各项系数 $A_W$ 、 $A_E$ 、 $A_U$ 、 $A_D$ 、 $C_A$ 以及自由项 $D_A$ 的表达式。在已知它们的数值之后,代入式(4-5-40)即可求得温度 $t_{i,j}^{n+1}$ 。

#### 4.5.2.6 空气压力的差分方程

空气压力 $p$ 的式(4-2-20)相应地差分方程与式(4-4-23)相似,可写为

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{a,i,j}^{n+1} R T_{i,j}^{n+1}}{M_a} \quad (4-5-41)$$

式中, $T_{i,j}^{n+1} = t_{i,j}^{n+1} + 273.15$ 。

综上所述,式(4-5-6)~式(4-5-8)、式(4-5-9)~式(4-5-11)、式(4-5-13)、式(4-5-22)、式(4-5-40)和式(4-5-41)即为本小节固气多孔材料热板加热问题的差分方程组。在初始条件给定后,即可由已知的当前时刻各物理量的值求得在区域 $0 \leq x \leq W, 0 \leq z \leq H$ 内下一时刻各物理量的值。也就是,通过差分方程可求得固气多孔材料内空气速度场 $u_{i,j}^n$ 与 $w_{i,j}^n$ 、空气密度场 $\rho_{a,i,j}^n$ 、空气压力场 $p_{i,j}^n$ 及多孔材料密度场 $\rho_{i,j}^n$ 与温度场 $t_{i,j}^n, n=1,2,\dots$ 。

#### 4.5.3 算例及计算结果讨论

本算例的已知条件有:板宽 $W=1$  m,板厚 $H=2$  cm,固相密度 $\rho_s=1530$  kg/m<sup>3</sup>,比热容 $c_s=1.354$  kJ/(kg·K),导热系数 $\lambda_s=0.5$  W/(m·K),孔隙率 $\phi=0.6$ ,孔隙内充满干空气,空气密度 $\rho_a=1.16$  kg/m<sup>3</sup>,导热系数 $\lambda_a=0.03$  W/(m·K),比热容 $c_a=1.007$  kJ/(kg·K),渗透率 $K=10^{-13}$  m<sup>2</sup>。空气动力粘度 $\eta$ 为温度的函数, $\eta=(17.326+0.0488t) \times 10^{-6}$  Pa·s。多孔材料上、下表面在时间 $\tau \geq 0$ 时与热板紧密接触,热板温度 $t_p$ 为常数, $t_p=200^\circ\text{C}$ 。环境温度 $t_e=20^\circ\text{C}$ 。材料初始温度与环境温度相同, $t_0=20^\circ\text{C}$ 。环境空气的压力 $p_e$ 为一个大气压, $p_e=0.1$  MPa。环境空气密度 $\rho_e$ 可根据 $t_0$ 与 $p_e$ 按理想气体状态方程算得。材料内初始空气压力 $p_{a0}$ 与密度 $\rho_{a0}$ 为平板周围的环境压力 $p_e$ 与密度 $\rho_e$ 。环境与多孔材料平板侧表面为自然对流冷却,自然对流表面传热系数 $h=5$  W/(m<sup>2</sup>·K)。取空间步长 $\Delta x=W/IX=1000$  mm/12=83.333 mm与 $\Delta z=H/JZ=20$  mm/10=2 mm,取时间步长 $\Delta \tau=0.01$  s。

本节由 6 个控制方程,即式(4-2-17)、式(4-2-19)、式(4-2-20)、式(4-4-14)、式(4-2-8)以及式(4-5-1),由这 6 个方程及相应定解条件构成定解问题,并由此可得到由式(4-5-6)~式(4-5-8)、式(4-5-9)~式(4-5-11)、式(4-5-13)、式(4-5-22)、式(4-5-40)和式(4-5-41)组成的差分方程组,进而可算得 6 个因变量( $u$ 、 $w$ 、 $p$ 、 $\rho$ 、 $\rho_a$  与  $t$ )离散形式的解。由于多孔材料密度  $\rho$  在平板整个加热过程中变化甚微,在本算例中其结果不再输出,只讨论 5 个因变量输出结果。计算结果以 2D、1D 与 0D 形式给出,它们的含义由图 4-34 说明。

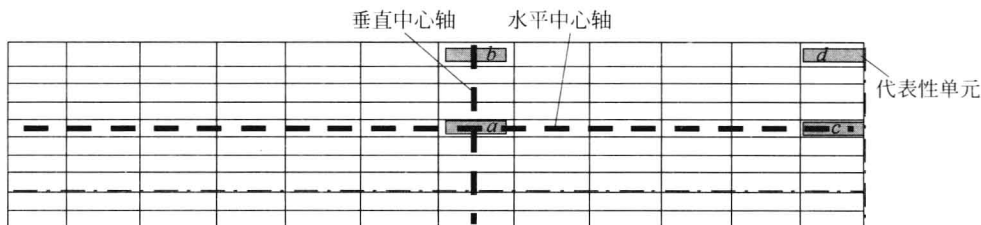


图 4-34 二维平板若干特定离散单元与节点

2D 形式: 2D 表示  $u_{i,j}^n$ 、 $w_{i,j}^n$ 、 $p_{i,j}^n$ 、 $\rho_{a,i,j}^n$  与  $t_{i,j}^n$  这 5 个因变量在整个二维(2D)平板每个单元随时间的变化。它们将通过计算机仿真以动画图型形式给出。

1D 形式: 1D 表示  $u_{i,j}^n$ 、 $w_{i,j}^n$ 、 $p_{i,j}^n$ 、 $\rho_{a,i,j}^n$  与  $t_{i,j}^n$  这 5 个因变量在整个二维平板内以特定的一维(1D)形式给出。对  $p_{i,j}^n$ 、 $\rho_{a,i,j}^n$  与  $t_{i,j}^n$  这 3 个因变量而言,特定的一维形式为平板的水平中心轴与垂直中心轴,图 4-34 中用粗虚线表示,即给出粗虚线上各单元的  $p_{i,j}^n$ 、 $\rho_{a,i,j}^n$  与  $t_{i,j}^n$  随时间的变化。对于速度  $u_{i,j}^n$  与  $w_{i,j}^n$  这 2 个因变量,特定的一维形式则用点划线表示,即给出通过点划线上各节点的  $u_{i,j}^n$  与  $w_{i,j}^n$  随时间的变化。

0D 形式: 0D 表示  $u_{i,j}^n$ 、 $w_{i,j}^n$ 、 $p_{i,j}^n$ 、 $\rho_{a,i,j}^n$  与  $t_{i,j}^n$  这 5 个因变量在整个二维平板内仅以 4 个代表性单元处的值随时间的变化。这 4 个代表性单元在平板中的位置由图 4-34 中 4 个深色方框 a、b、c、d 表示。

1D 与 0D 的输出结果可以以曲线形式表示。

下面我们通过图 4-35~图 4-49 以 1D 形式以及图 4-50 与图 4-51 以 0D 形式给出  $u_{i,j}^n$ 、 $w_{i,j}^n$ 、 $p_{i,j}^n$ 、 $\rho_{a,i,j}^n$  与  $t_{i,j}^n$  这 5 个因变量的计算结果并进行分析讨论。

如前所述,本节讨论的固气多孔材料平板加热问题实质上是 4.3 节封闭孔隙多孔材料平板加热问题与 4.4 节等温渗流问题的结合。所以,在分析本算例计算结果时将对比前两节的结果。为便于讨论,将  $u_{i,j}^n$ 、 $w_{i,j}^n$ 、 $p_{i,j}^n$ 、 $\rho_{a,i,j}^n$  与  $t_{i,j}^n$  这 5 个因变量的计算结果逐个进行分析。

4.5.3.1 关于温度

图 4-35~图 4-37 表示固气多孔材料受热板加热条件下材料的温度响应。图 4-35 与图 4-36 是垂直中心轴上单元的温度响应。图 4-35 为平板被加热后若干时刻( $\tau=0, 5, 15, 50, 100, 150, 200, 250$  及  $300\text{ s}$ )垂直中心轴上温度分布。

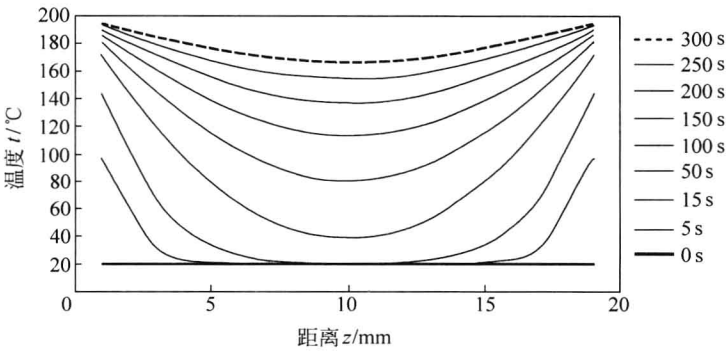


图 4-35 垂直中心轴温度分布随时间变化

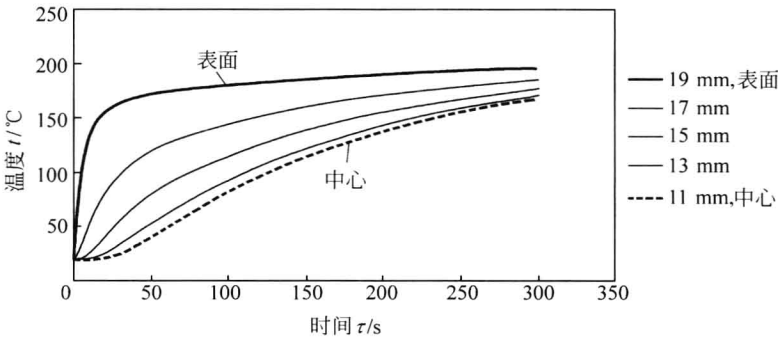


图 4-36 垂直中心轴上半部各单元温度随时间变化

如图 4-35 所示,由于垂直中心轴单元的温度分布对水平中心轴( $z=10\text{ mm}$ )呈现对称特征,则图 4-36 给出的是垂直中心轴上半部分( $z>10\text{ mm}$ )节点( $z=11, 13, 15, 17$  与  $19\text{ mm}$ )处温度随时间的变化。

图 4-37 是平板水平中心轴上的温度响应。由于水平中心轴单元的温度分布对垂直中心轴( $x=500\text{ mm}$ )呈现对称特征,则图 4-37 给出的是水平中心轴右半部

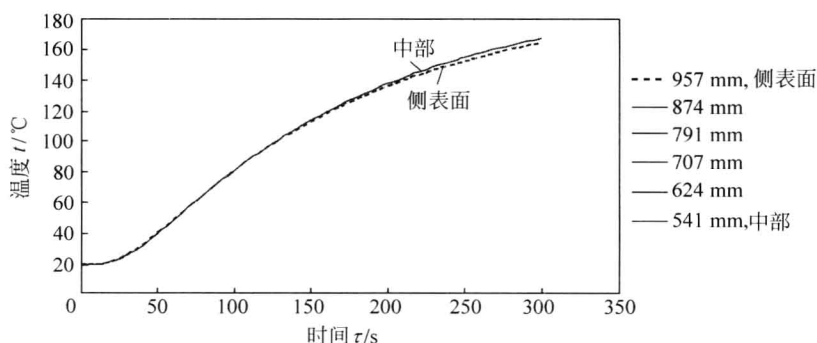


图 4-37 水平中心轴右半部各单元温度随时间变化

分( $x > 500$  mm)节点( $x = 541, 624, 707, 791, 874$  及  $957$  mm)温度随时间的变化。如图所示,从  $x = 541$  mm 到  $x = 874$  mm 5 个节点温度始终几乎相同,只有  $x = 957$  mm 这一个节点,即平板边缘单元,温度呈现稍许的下降,如图中虚线所示。这说明,在平板加热这个非稳态阶段内,平板水平方向传热是微弱的。

根据图 4-35、图 4-36 与图 4-37 提供的曲线,我们可得到这样的结论:在固气多孔材料平板被上、下热板加热后,传热主要发生在平板的厚度方向(垂直方向),沿宽度方向(水平方向)是极微弱的。正是这样的缘故,在分析平板瞬态加热问题时,可用沿厚度方向的一维瞬态传热问题来近似。

若在本算例的计算机程序中,设  $u_{i,j}^n$  与  $w_{i,j}^n$  始终为 0,则运行程序所得温度场的结果即为固气多孔材料经历单纯热传导过程的温度响应。这些结果与图 4-35~图 4-37 相比,可说相差无几。若将图 4-35、图 4-36 与第 2 章中图 2-13、图 2-12 相比,它们之间也十分相近。总之,就温度场而言,本算例提供的固气多孔材料加热过程十分近似单纯热传导过程。究其原因,一是固气多孔材料中空气相的比热容远小于固相比热容;二是气相的流动速度很小。

#### 4.5.3.2 关于空气压力

图 4-38~图 4-42 表示固气多孔材料受热板加热条件下材料内空气压力变化的情形。图 4-38 给出的是垂直中心轴上半部分( $z > 10$  mm)单元空气压力随时间的变化。由图可见,在本算例条件下,垂直中心轴上各单元的压力响应似乎相同。然而,当仔细阅读  $p_{i,j}^n$  的数据,或以表面压力与中心压力的差值作为因变量,见表 4-4 中数据,仍可发现,在垂直中心轴上,平板表面与平板中心还有微小的压力

差别。在加热过程开始的短期内(例如  $\tau \leq 30$  s),表面处压力稍高于中心处,而后 ( $\tau > 30$  s)又转为中心处压力稍高于表面处。这一特征与图 4-36 所示的温度响应表面始终高于中心很不一样。关于沿平板垂直中心轴上空气压力分布随时间变化规律还可从空气速度  $w$  的变化规律中看到。

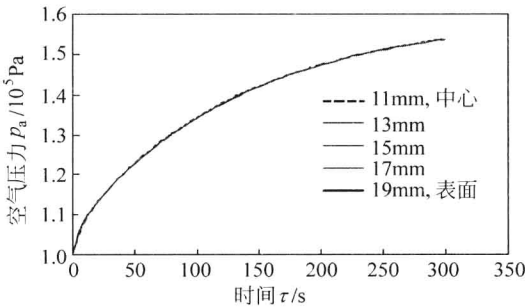


图 4-38 垂直中心轴上半部各单元空气压力随时间变化

表 4-4 平板垂直中心轴上表面与中心空气压力

时间 $\tau/s$	表面压力 $p_{i=IX/2,j=JZ}$ $/10^5$ Pa	中心压力 $p_{i=IX/2,j=JZ/2}$ $/10^5$ Pa	压力差 $p_{i=IX/2,j=JZ} - p_{i=IX/2,j=JZ/2}$ $/10^5$ Pa
0	1	1	0
5.0	1.0559	1.0508	0.0051
30.0	1.1663	1.1662	0.0001
60.0	1.2533	1.2538	-0.0005
90.0	1.321	1.3214	-0.0004
150.0	1.4185	1.4188	-0.0003
200.0	1.4733	1.4735	-0.0002
250.0	1.5113	1.5115	-0.0002

图 4-39 与图 4-40 是水平中心轴上单元的空气压力响应。图 4-39 为平板从被加热后若干时刻( $\tau=0,5,15,50,100,150,200,250$  及 300 s)水平中心轴压力分布。如图所示,由于水平中心轴单元的压力分布对垂直中心轴( $x=500$  mm)呈现对称特征,则图 4-40 给出的是右半水平中心轴上( $x>500$  mm)各节点处( $x=541,624,707,791,874,957$  mm)压力随时间的变化。由图可见,在本算例条件下,水平中心轴上各单元的压力不尽相同,从中心到边缘由高而低。这一特征也与温度响



应中沿水平方向几乎相同不一样。

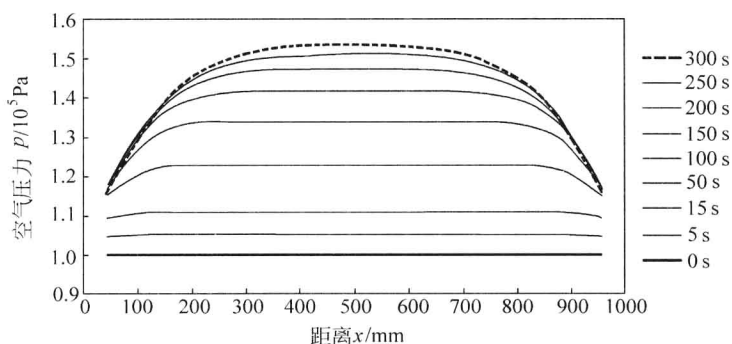


图 4-39 水平中心轴空气压力分布随时间变化

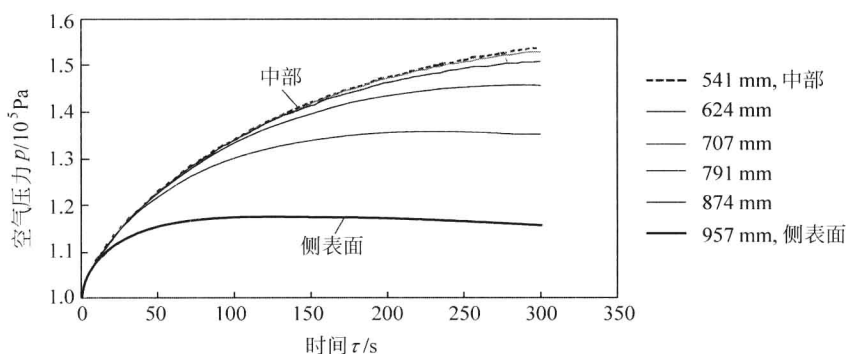


图 4-40 水平中心轴右半部各单元空气压力随时间变化

纵观本算例中的温度响应与压力响应,前者在垂直中心轴上呈现分布而在水平中心轴上几乎相同,只在边缘处稍有变化;而后者在垂直中心轴上几乎相同,在水平中心轴上呈现分布。两者的分布特征很不一样。

为了更好地认识本算例空气压力响应的特点,不妨将它与封闭孔隙固气多孔材料内单纯热传导条件下空气压力响应进行对比。图 4-41 与图 4-42 分别给出了单纯热传导条件下平板垂直中心轴与水平中心轴的空气压力随时间的变化。

一般而言,气体的压力与气体温度及气体密度有关,  $p = f(t, \rho_a)$ 。但在封闭孔隙多孔材料内,在单纯热传导条件下,气相速度为 0,空气密度不发生变化,使空气的压力唯一取决于温度,  $p = f(t)$ 。这样,图 4-41 与图 4-42 中压力响应曲线与

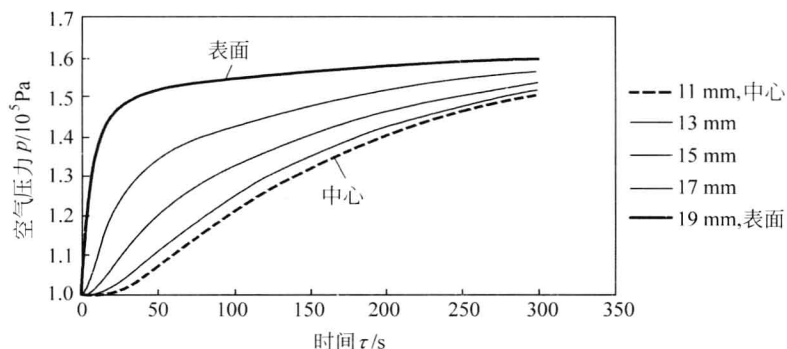


图 4-41 垂直中心轴上半部各单元空气压力随时间变化

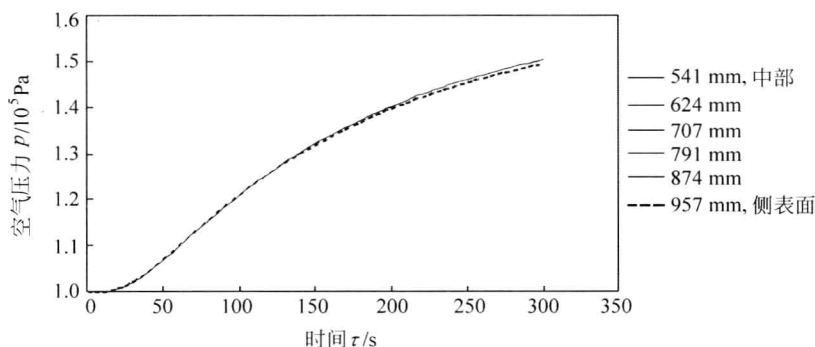


图 4-42 水平中心轴右半部各单元空气压力随时间变化

图 4-36 与图 4-37 中温度响应曲线完全相似。在空气流动的条件下,尽管是微弱的渗流,压力响应与温度响应就很不一样,空气的流动造成空气密度的变化。因此,要认识多孔材料内空气压力响应的行为必须联系到空气密度的行为。

#### 4.5.3.3 关于空气密度

图 4-43 与图 4-44 表示固气多孔材料受热板加热条件下材料内空气密度变化的情形。图 4-43 是平板上半部分垂直中心轴上各节点( $z=11, 13, 15, 17, 19$  mm)所对应单元密度的变化过程。由图可见,在加热过程开始前,平板各单元空气密度相同,而当平板上、下表面被热板加热后,空气密度发生变化。表面处的密度先降而后转为升,而中心处的密度先升而后降。空气密度这种变化规律还需与空气流

动的方向以及当地温度变化联系起来考虑。由于加热开始后表面处温度较中心处高,使表面处的压力较中心处高(见表4-4),引起空气由表面向中心流动,从而造成表面处空气密度下降而中心处上升,相应地使表面与中心处的压力差别缩小。这样,在加热过程前期,表现为表面处温度高与气体密度低而中心处温度低与空气密度高,两者的压力相差不大。

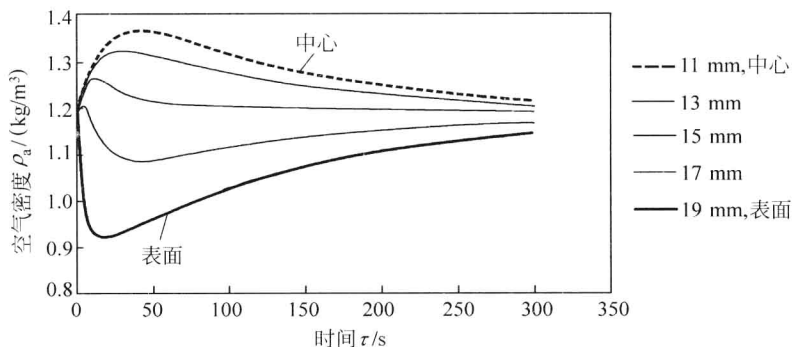


图 4-43 垂直中心轴上半部各单元空气密度随时间变化

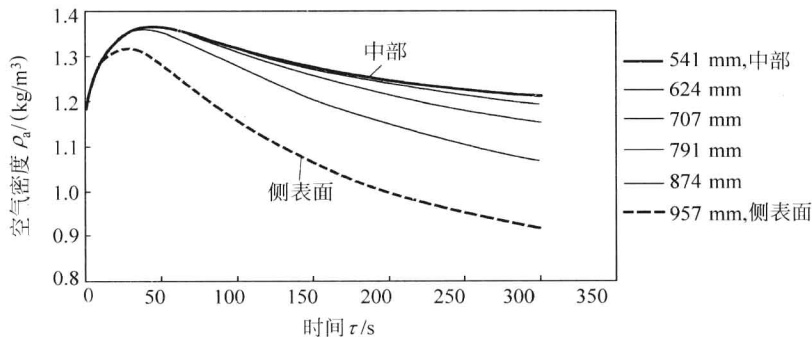


图 4-44 水平中心轴右半部各单元空气密度随时间变化

随着加热过程的继续,表面处的空气密度在下降一段时间后又出现回升。这是因为,中心处的温度逐渐升高再加之中心处空气密度升高,造成中心处空气压力升高并超过表面处的压力,引起空气由中心向表面流动,使中心处的空气密度由升高而下降,表面处密度由下降而上升。

再看图 4-44 水平中心轴上各单元空气密度随时间变化。这里有两个明显的

特征。其一是,各单元的空气密度都是先升而后转为下降。密度上升的原因是当地的压力上升。对照图 4-40 压力响应曲线,可见密度与压力两者在加热前期有相当的类同。但压力响应在整个加热期间几乎一直在上升,只有靠近平板侧面的单元出现缓慢的下降趋势,而密度则在较早时就出现由上升而转为下降。这是由于空气向平板两侧边缘流动致使当地空气质量减少密度下降。第二个特征是,平板边缘处的空气密度总是低于中心处,这同样可以从图 4-39 压力分布的特点得到解释。

#### 4.5.3.4 关于空气水平速度

图 4-45 表示水平中心轴上各节点( $x=500, 583, 667, 750, 833, 917, 1000$  mm)处空气水平速度  $u$  随时间变化。由图可见,从平板中心处( $x=500$  mm)到平板边缘( $x=1000$  mm),水平速度不断加快,也就是,空气在水平方向有一个加速过程。

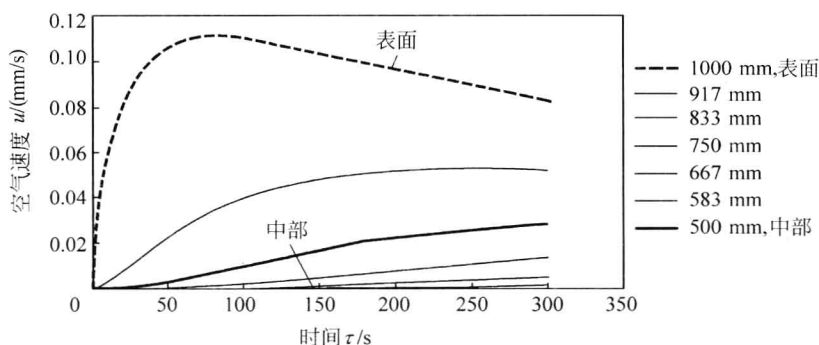


图 4-45 水平中心轴右半部各单元空气水平速度随时间变化

图 4-46 是平板右侧表面上各单元空气水平速度随时间变化。这里有两个明显的特征。一是,速度都是由 0 迅速升高到最大值后而缓慢减小;二是,中心处的速度总是大于表面处,最终趋于相同。

#### 4.5.3.5 关于空气垂直速度

图 4-47 给出的是平板垂直中心轴下半部各节点( $z=2, 6, 8$  mm)处空气垂直速度  $w$  随时间变化。这里也有两个明显的特点。其一,在加热过程短暂的前期( $\tau \leq 10$  s),速度大于 0,为正值,速度方向向上,即空气从表面流向中心,而经过这个前期后,速度由正值转为负值,方向向下,即从中心向表面,且速度逐渐下降至趋于 0。另一个特点是,在加热过程大部分时间内,就绝对值而言,表面处的速度总是大于中心处。

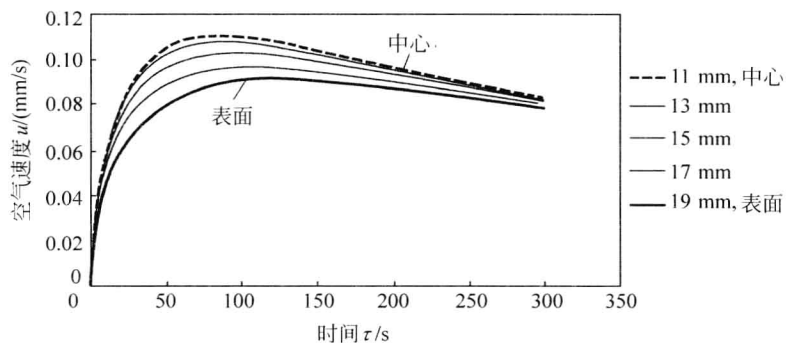


图 4-46 平板右侧表面上各单元空气水平速度随时间变化

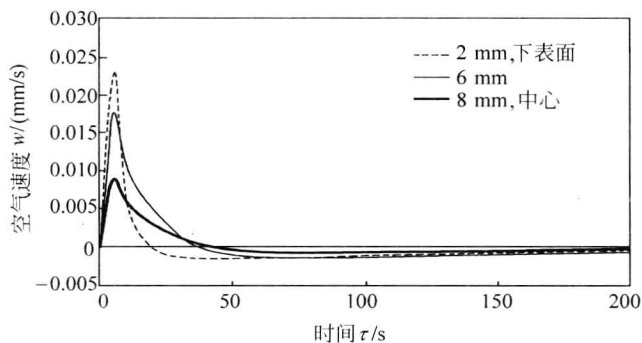


图 4-47 垂直中心轴下半部各单元空气垂直速度随时间变化

图 4-48 中的曲线正好与图 4-47 曲线对水平中心轴呈对称分布。

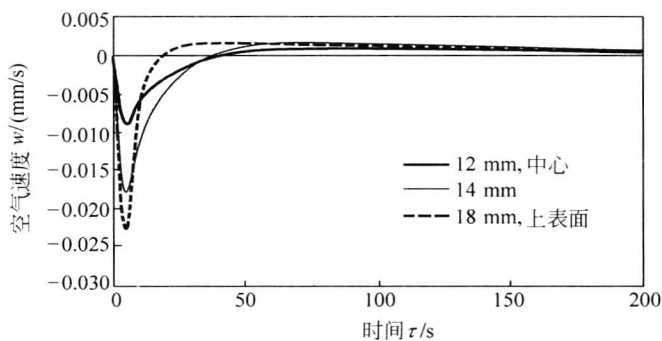


图 4-48 垂直中心轴上半部各单元空气垂直速度随时间变化

关于图 4-47 与图 4-48 中曲线走向的物理解释,我们在关于空气压力行为的解释中已有一定的说明(见表 4-4),即在加热前期,表面空气压力高于中心,而后,中心又高于表面,造成空气在加热前期由表面流向中心而后又由中心流向表面。

图 4-49 是图 4-34 中对应于  $j=3$  以点划线表示的节点上速度随时间变化的特征。由图 4-49 可见,在水平方向不同位置上,速度的行为几乎相同。它们随时间的变化都是先正而后转为负,而后逐渐趋于 0。

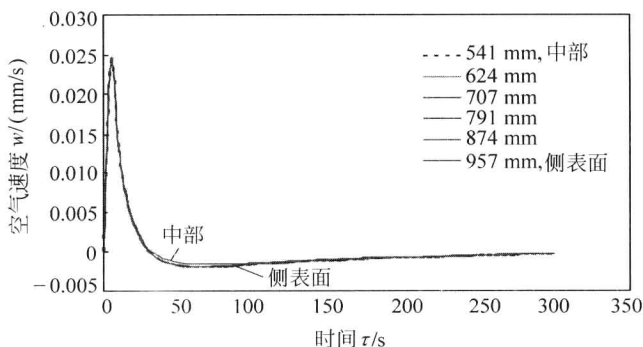


图 4-49 水平轴( $j=3$ )右半部各单元空气垂直速度随时间变化

#### 4.5.3.6 关于温度与压力的稳态趋向

4.5.3.1 节~4.5.3.5 节中讨论的是 5 个因变量在加热过程瞬态阶段的变化。这种瞬态过程在经历一段长时间后就趋于稳态。图 4-50 与图 4-51 显示温度  $t_{i,j}^n$  与压力  $p_{i,j}^n$  由瞬态趋于稳态的过程。每个图中 4 条曲线对应于图 4-34 中 4 个标有  $a$ 、 $b$ 、 $c$  与  $d$  的代表性单元。由图 4-50 可见,温度响应在瞬态过程表现为,表面处  $b$  与  $d$  两点温度几乎相同,总是高于中心( $a$  与  $c$ ),而趋于稳态后表现为,中心点  $a$  与表面处的  $b$  和  $d$  都相同,仅仅边缘中心处( $c$ )的温度稍低。

由图 4-51 可见,压力响应无论是瞬态或是稳态过程,表现为平板中部( $a$  与  $b$ )总是高于平板侧表面边缘处( $c$  与  $d$ ),而  $a$  与  $b$  总是几乎相同, $c$  与  $d$  也总是几乎相同。

对比图 4-50 与图 4-51 可看到,在多孔材料平板加热过程中,温度响应瞬态过程所经历的时间比压力响应要短。

关于密度与速度的变化这里没给出图示,但可以根据温度与压力响应曲线,分析它们的行为。

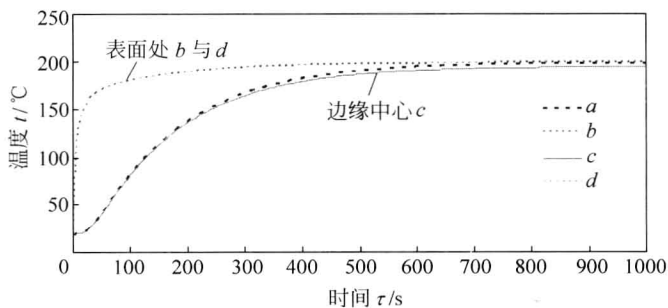


图 4-50 温度响应的瞬态与稳态

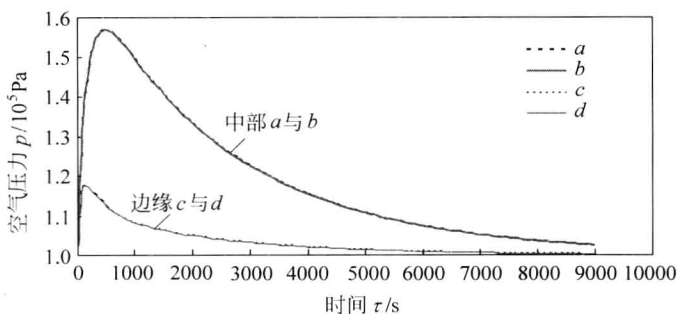


图 4-51 空气压力响应的瞬态与稳态

## 4.6 固气多孔材料空气流加热

本节讨论固气多孔材料平板在空气对流加热条件下其内部温度、空气压力、密度与速度的响应。与 4.5 节相比,只是改变了边界条件,由热板加热改为热空气对流加热。如前讨论所知,若平板的两侧与底部都与环境绝热,其传热传质过程只发生在沿板的厚度方向,这里假定为一维传热传质,如图 4-52 所示。这样,热量从平板上表面垂直向下传递,而固气多孔材料内的空气质量由平板内部垂直向上传递。本节介绍这一问题的控制方程与定解条件,相应差分方程及其求解,最终举例演示多孔材料温度场与空气压力场、空气密度场及空气速度场。

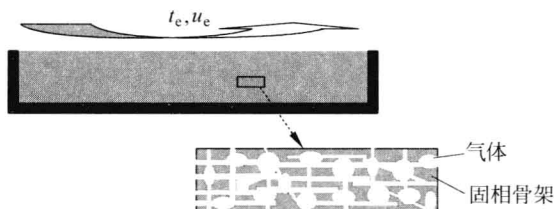


图 4-52 一维固气多孔材料空气对流加热示意图

#### 4.6.1 控制方程及定解条件

本问题涉及的因变量是空气速度  $w$ 、空气压力  $p$ 、空气密度  $\rho_a$  及多孔材料密度  $\rho$  与温度  $t$ 。它们相应地控制方程如下：

- (1) 空气速度  $w$  的动量方程(4-2-19)；
- (2) 空气压力  $p$  的气体状态方程(4-2-20)；
- (3) 空气密度  $\rho_a$  的质量守恒方程

$$\frac{\partial \phi \rho_a}{\partial \tau} = - \frac{\partial \rho_a w}{\partial z} \quad (4-6-1)$$

- (4) 多孔材料密度  $\rho$  的定义式(4-2-8)；
- (5) 温度  $t$  的能量守恒方程

$$\frac{\partial \rho c t}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \frac{\partial \rho_a c_a w t}{\partial z} \quad (4-6-2)$$

式中,导热系数  $\lambda$  与热容  $\rho c$  服从式(4-2-14)与式(4-2-15)。

式(4-2-19)、式(4-2-20)、式(4-2-8)、式(4-6-1)及式(4-6-2)构成本问题的封闭的控制方程组。相应地定解条件如下。

(1) 几何条件: 本问题坐标原点设在平板的底部,故求解的几何域为  $0 \leq z \leq H$ 。

(2) 初始条件: 空气速度  $w$  的初始值为 0。空气压力  $p$  的初始值为  $p_0$ ,它与平板周围环境空气的压力  $p_e$  相同,即  $p_0 = p_e$ 。平板材料初始温度为  $t_0$ ,与环境温度  $t_e$  不相同。空气密度  $\rho_a$  的初始值  $\rho_{a0}$  由  $p_0$  与  $t_0$  按气体状态方程(4-2-20)求得。

(3) 边界条件: 对于空气速度  $w$ ,在  $z=0$  处,  $w=0$ 。给定环境空气压力  $p_e$  供计算平板上表面处空气速度  $w$  用。对于空气压力  $p$ 、空气密度  $\rho_a$  与多孔材料密度  $\rho$  无需单独提供边界条件,对于温度  $t$ ,其边界条件为



$$z = 0 \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (4-6-3)$$

$$z = H \quad h(t_e - t) = \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \quad (4-6-4)$$

式中,环境温度  $t_e$  和环境空气与材料平板表面之间的受迫对流表面传热系数  $h$  都是常数。

(4) 物理条件: 多孔材料渗透率  $K$  与导热系数  $\lambda$  为常数, 空气比热容  $c_a$  为常数, 动力粘度  $\eta$  为温度的函数(见 4.5.3 节)。

综上所述,本问题涉及 5 个因变量,对应应有 5 个控制方程,由它们构成的方程组是封闭的。根据相应地定解条件即可求得关于  $w$ 、 $\rho_a$ 、 $\rho$ 、 $p$  与  $t$  的唯一解,也即多孔平板内确定的空气速度场  $w(z, \tau)$ 、空气密度场  $\rho_a(z, \tau)$ 、空气压力场  $p(z, \tau)$  以及多孔材料密度场  $\rho(z, \tau)$  与温度场  $t(z, \tau)$ 。

## 4.6.2 差分方程

对应于上述控制方程及定解条件,可得到相应地差分方程。其离散的求解区域如图 4-53 所示,平板高度  $H = JZ \times \Delta z$ 。 $\Delta z$  是单元高度,常数。单元数为  $JZ$  个,单元对应的节点都位于单元的中央。对于每个单元可定义压力  $p_j$ 、密度  $\rho_{a,j}$  与温度  $t_j$  ( $j=1, 2, \dots, JZ$ )。

用交错网格定义沿  $z$  方向速度  $w_j$ , 由图 4-53 中小方框所示。 $w_j$  对应的节点数为  $JZ+1$ 。

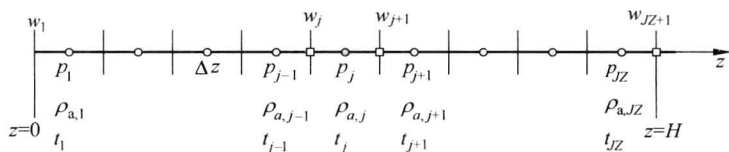


图 4-53 求解区域离散化

应该指出,由于传热的缘故,空气动力粘度  $\eta$  不再是常数,它是温度的函数。为此,有  $\eta = \eta_j$ , 且  $\eta_j = \frac{1}{2}[\eta(t_j) + \eta(t_{j-1})]$ , 表示流体从单元  $j-1$  流到单元  $j$  时所具有的动力粘度是温度为  $t_j$  与  $t_{j-1}$  的粘度的算术平均值。

### 1. 空气速度

关于空气速度  $w$  的方程(4-2-19)所相应地差分方程为

$$w_j^{n+1} = -\frac{K}{\eta_j} \frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{\Delta z} \quad j = 2, 3, \dots, JZ \quad (4-6-5)$$

和

$$w_j^{n+1} = 0 \quad j = 1 \quad (4-6-6)$$

以及

$$w_j^{n+1} = -\frac{K}{\eta_j} \frac{p_e - p_{j-1}^n}{\Delta z} \quad j = JZ + 1 \quad (4-6-7)$$

## 2. 空气密度

关于空气密度  $\rho_a$  的方程(4-6-1)所相应地差分方程为

$$\rho_{a,j}^{n+1} = \rho_{a,j}^n - \frac{\Delta \tau}{\phi \Delta z} (\rho_{a,j-1}^n - \rho_{a,j}^n) \quad j = 1, 2, \dots, JZ \quad (4-6-8)$$

## 3. 多孔材料密度

多孔材料密度  $\rho$  的差分方程如同式(4-5-22), 此处为

$$\rho_j^{n+1} = (1 - \phi) \rho_s + \phi \rho_{a,j}^{n+1} \quad (4-6-9)$$

## 4. 多孔材料温度

关于温度  $t$  的方程(4-6-2)所对应的差分方程可用控制容积的方法获得。

(1) 内单元

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{t_{j-1}^n - t_j^n}{\Delta z} + \lambda \frac{t_{j+1}^n - t_j^n}{\Delta z} + \rho_{a,j-1} c_a w_j t_{j-1}^n - \rho_{a,j} c_a w_{j+1} t_j^n \\ & = \frac{(\rho c t_j)^{n+1} - (\rho c t_j)^n}{\Delta \tau} \Delta z \quad j = 2, 3, \dots, JZ - 1 \end{aligned}$$

上式等号左边前两项表示该单元在单位时间内通过其边界以热传导方式到达该单元的热量, 等号左边第三、四项表示该单元在单位时间内通过边界以热对流方式到达该单元的热量, 等号右边表示该单元在单位时间内能量的增加。参照式(4-5-23), 现将上式重新整理, 可得

$$\begin{aligned} t_j^{n+1} = & \left[ \lambda \frac{t_{j-1}^n - t_j^n}{\Delta z} + \lambda \frac{t_{j+1}^n - t_j^n}{\Delta z} + \rho_{a,j-1} c_a w_j t_{j-1}^n \right. \\ & \left. - \rho_{a,j} c_a w_{j+1} t_j^n \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)_j^{n+1} \Delta z} + t_j^n \end{aligned} \quad (4-6-10)$$

(2) 上边界单元

上边界单元( $j = JZ$ )是材料平板上表面与环境相邻的单元, 其与内单元差分

方程的差别只是来自上边的热传导项  $\lambda \frac{t_{j+1}^n - t_j^n}{\Delta z}$  用对流传热项  $h(t_e - t_j)$  替代, 则差分方程为

$$t_j^{n+1} = \left[ \lambda \frac{t_{j-1}^n - t_j^n}{\Delta z} + h(t_e - t_j) + \rho_{a,j-1} c_a w_j t_{j-1}^n - \rho_{a,j} c_a w_{j+1} t_j^n \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta z} + t_j^n \quad (4-6-11)$$

### (3) 下边界单元

下边界单元 ( $j=1$ ) 是处于材料平板底部的单元, 其与内单元差分方程的差别只是来自下边的热传导与热对流均为 0, 则差分方程为

$$t_j^{n+1} = \left[ \lambda \frac{t_{j-1}^n - t_j^n}{\Delta z} - \rho_{a,j} c_a w_{j+1} t_j^n \right] \frac{\Delta \tau}{(\rho c)^{n+1} \Delta z} + t_j^n \quad (4-6-12)$$

上述由式(4-6-10)、式(4-6-11)与式(4-6-12)构成温度  $t$  的差分方程可统一写成

$$t_{i,j}^{n+1} = A_D t_{j-1}^n + A_U t_{j+1}^n + C_A t_j^n + D_A \quad (4-6-13)$$

式(4-6-13)表明, 材料平板每个内部单元在某下一时刻的温度都可表示为它两边相邻单元及自身单元当前时刻温度的线性组合,  $D_A = 0$ 。对于与环境相邻的边界单元, 则系数  $C_A$  及自由项  $D_A$  将反映环境条件对边界单元温度的影响。

## 5. 空气压力

关于空气压力  $p$  的式(4-2-20)相应地差分方程与式(4-5-37)相似, 可写为

$$p_j^{n+1} = \frac{\rho_{a,j}^{n+1} R T_j^{n+1}}{M_a} \quad (4-6-14)$$

式中,  $T_j^{n+1} = t_j^{n+1} + 273.15$ 。

综上所述, 式(4-6-5)~式(4-6-7)、式(4-6-8)、式(4-6-9)、式(4-6-13)与式(4-6-14)即为本小节空气对流加热条件下一维固气多孔材料非稳态传热传质问题的差分方程组。在初始条件给定后, 即可由已知的当前时刻各物理量的值求得在区域  $[0, H]$  内下一时刻各物理量的值。也就是, 通过差分方程可求得固气多孔材料内空气速度场、密度场、压力场及多孔材料的密度场与温度场。

### 4.6.3 算例及计算结果讨论

本算例的已知条件有: 板厚  $H = 2 \text{ cm}$ , 固相密度  $\rho_s = 1530 \text{ kg/m}^3$ , 比热容  $c_s = 1.354 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$ , 导热系数  $\lambda_s = 0.5 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ , 孔隙率  $\phi = 0.6$ , 孔隙内充满干空气, 空气密度  $\rho_a = 1.16 \text{ kg/m}^3$ , 导热系数  $\lambda_a = 0.03 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ , 比热容  $c_a =$

1.007 kJ/(kg·K), 渗透率  $K = 10^{-13} \text{ m}^2$ , 空气动力粘度  $\eta$  为温度的函数,  $\eta = (17.326 + 0.0488t) \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。在时间  $\tau \geq 0$  时, 温度  $t_e = 200^\circ\text{C}$ , 速度  $u_e = 13 \text{ m/s}$  的空气流掠过固气多孔材料上表面, 形成受迫对流加热, 相应地受迫对流表面传热系数  $h = 15.1 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。材料初始温度  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , 环境空气的压力  $p_e$  为 1 个大气压,  $p_e = 0.1 \text{ MPa}$ 。材料内初始空气压力  $p_{a0}$  为环境压力  $p_e$ , 环境与材料内空气密度  $\rho_e$  与  $\rho_{a0}$  分别可根据  $t_e$  与  $t_0$  以及  $p_e$  按理想气体状态方程算得。取空间步长  $\Delta z = 2 \text{ mm}$ , 取时间步长  $\Delta \tau = 0.01 \text{ s}$ 。

本算例可算得 5 个因变量离散形式的解。由于多孔材料密度  $\rho$  在平板整个加热过程中变化甚微, 在本算例中其结果不再给出, 只给出 4 个因变量(多孔材料温度  $t$ 、空气压力  $p$ 、空气密度  $\rho_a$  及速度  $w$ ) 结果, 它们显示在图 4-54 ~ 图 4-57 中。

图 4-54 显示了材料的温度响应, 图中 4 条曲线对应于  $z = 1, 7, 13$  及  $19 \text{ mm}$  处 4 个地点的温度变化。由图中曲线可见, 它们与第三类边界条件下单纯热传导的结果非常接近。这再次显示, 在一定条件下, 固气多孔材料传热传质过程中, 空气渗流对温度响应的影响甚微。

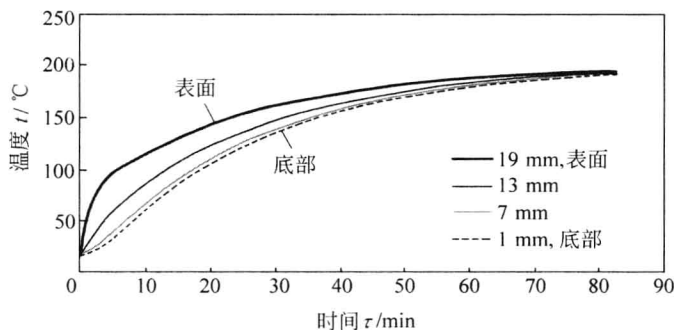


图 4-54 温度响应

图 4-55 是压力响应, 图中曲线是材料内空气压力  $p_i$  与环境压力  $p_e$  之差。这些曲线的特征为: (1) 对时间而言, 每条曲线(即板内沿厚度不同地点)所示的压力都是先急速上升而后缓慢下降。上升是当地温度上升所致, 而下降为空气在材料内渗流所致。曲线最终趋于 0 表示材料内空气压力与环境压力相一致。(2) 对板内的地点而言, 平板底部( $z = 0$ )的压力总是高于表面处( $z = 19 \text{ mm}$ )的压力。它们之间的差值, 在接受加热前期被加大而后逐渐缩小并趋于 0。

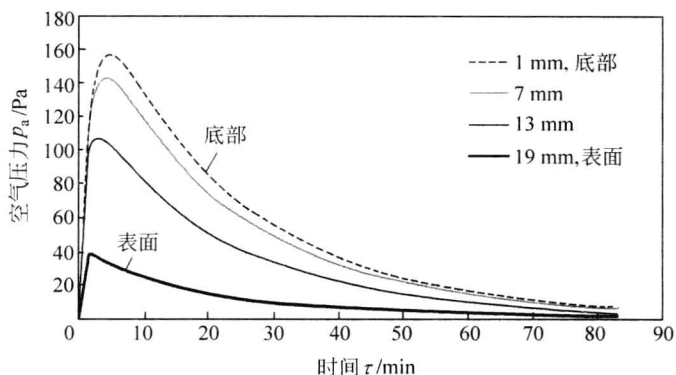


图 4-55 空气压力响应

图 4-56 为固气多孔材料内的空气密度  $\rho_a$  在材料被加热后的响应。图中曲线都是单调地下降,表示空气向环境渗出。表面处下降得快,底部处下降得慢,但最终都平衡到环境热空气的密度。

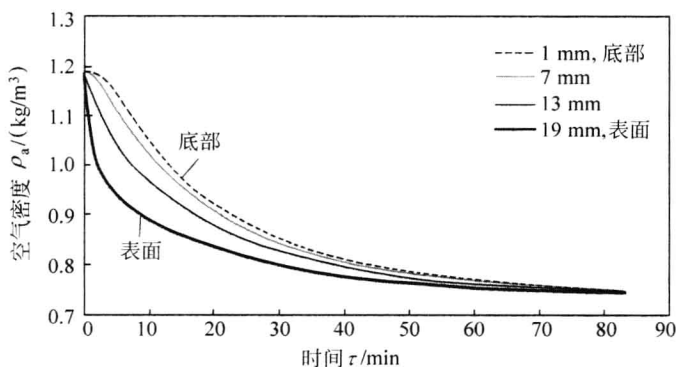


图 4-56 空气密度响应

图 4-57 为固气多孔材料内的空气在材料被加热后引起流动而形成的速度分布随时间的变化。对照图 4-57 与图 4-55 中曲线走向,两者非常相似,这一点很容易理解,因为速度是由压力差决定的。需注意的是,对压力而言,从平板底部到表面由大而小,是一个压力缓解的过程,但对速度而言,从平板底部到表面由小而大,是加速的过程。

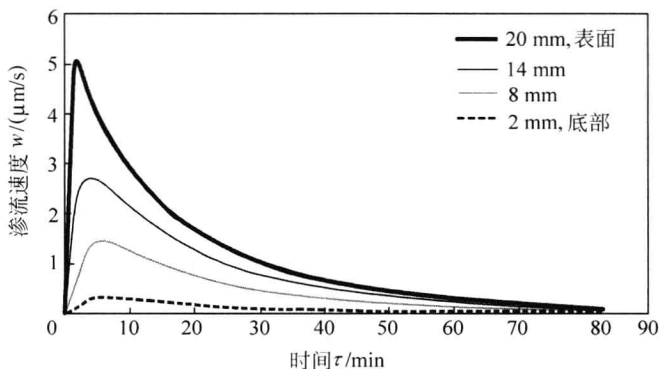


图 4-57 空气速度响应

## 习 题

4-1 对比式(4-1-1)与式(1-1-1),两者有何区别?其中渗透系数 $k$ 与渗透率 $K$ 在量纲上有何差别?如何从量纲上的差别看到物理含义的区别。

4-2 如图4-58所示,边长 $L$ 的立方体为一多孔材料模型化结构,体内有大量( $n$ 个)截面积长度为 $l$ 的正方形槽道。

在槽道两端压力差 $\Delta p$ 驱动下气体流过槽道,实验得到如下公式:

$$q_v = \frac{nl^4}{250\eta} \frac{\Delta p}{L}$$

式中, $q_v$ 是气体体积流量 $[\text{m}^3/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$ ;  $\eta$ 是气体动力粘度; $n$ 是横截面上槽道数目。若 $L=1 \text{ mm}$ ,  $l=10 \text{ } \mu\text{m}$ , (1)求图4-58所示多孔材料结构的孔隙率;(2)对照式(4-1-1),推导渗透率与孔隙率的关系;(3)求多孔材料的渗透率。

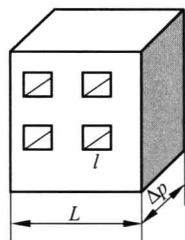


图 4-58

4-3 为什么孔隙率 $\phi$ 在式(4-2-7)中只出现在等号左边,在式(4-2-12)中出现在等号两边,而在式(4-2-16)中根本没有出现,难道孔隙率与式(4-2-16)无关吗?

4-4 一块含有对人体有害成分的多孔材料,置于纯净的密闭房间内,材料内有害

成分向纯净的房间弥散。已知多孔材料平板的表面积  $A_s = 1 \text{ m}^2$ , 板厚  $H = 2 \text{ cm}$ , 纯净房间体积为  $20 \text{ m}^3$ , 板内有害成分初始密度  $\rho_0 = 10 \text{ g/m}^3$ , 有害成分在多孔平板内的质扩散率  $D_m = 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$ , 表面传质系数  $h_m = 1.17 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ , (1) 将有害成分从板内向环境散发过程视为稳态过程, 质量的传输途径如图 4-59 所示为一流阻串连网络, 试问多孔材料平板传向房间的质量流密度  $[\text{g}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$ ? 若房间内有有害气体密度允许值为  $0.1 \text{ mg/m}^3$ , 经过多长时间房间内气体中有害成分的容积密度达到允许值? (2) 建立控制方程及定解条件, 并用有限差分法进行求解。

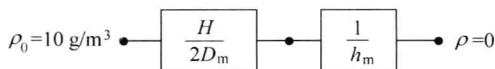


图 4-59

- 4-5 对照 4.4.1 节中一维稳态等温渗流, 图 4-60 表示一维稳态非等温渗流。如图 4-60 所示, 热量从平板右侧传向左侧, 已知板内温度分布为一直线, 即  $t = t_2 + (t_1 - t_2)x/H$ , 其中  $H$  是板的厚度,  $t_1$  与  $t_2$  分别为  $x=H$  处与  $x=0$  处的温度。气体从平板左侧渗流向右侧, 已知  $x=0$  处, 气体的压力为  $p_1$ , 密度为  $\rho_1$ , 动力粘度为  $\eta_1$ 。

- (1) 若假定气体密度为常数, 动力粘度是温度的函数且可表示成  $\eta = \eta_1 [1 - \alpha(t - t_2)]$ , 其中  $\alpha$  为气体动力粘度的温度系数。试求平板内气体压力分布。
- (2) 若气体密度是温度与压力的函数, 满足理想气体状态方程。试建立寻求板内气体压力、密度及速度的控制方程及相应定解条件。
- (3) 试用解析法求解上述定解问题可能性。
- (4) 试用有限差分法写出求解上述定解问题的差分格式。

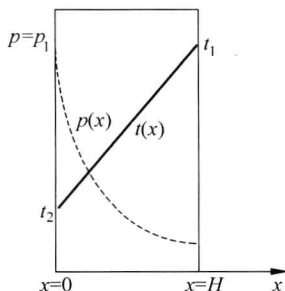


图 4-60

- 4-6 对照 4.5 节固气多孔材料热板加热图 4-29 的情形。若有温度为  $t_0$  ( $t_p = t_0$ ) 的气体从  $x=0$  处流入多孔材料, 流动是一维稳态渗流, 即速度为常数。传热也是稳态的, 即材料内温度分布不再随时间变化, 材料与气体的物性参数均为常数。试建立寻求多孔材料平板内温度分布的控制方程及相应定解条件。

## 参考文献

- [1] NIED D A, BEJAN A. Convection in Porous Media[M]. 2nd ed. Springer, 2006.
- [2] 南京工学院等. 粘性流体力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [3] WOODING R A. Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium[J]. J Fluid Mech, 1957, (2): 273-285.
- [4] DULLIEN F A. Porous media: fluid transport and pore structure[M]. 2nd ed. New York: Academic Press, 1992.
- [5] ABDALLAH ZERROUG K Z, LARBI R. Thermal conductivity model of porous materials[J]. Journal of Engineering and Applied Science, 2007, 2(4): 722-727.
- [6] WANG J, CARSON J K, NORTH M F. A new structural model of effective thermal conductivity for heterogeneous materials with co-continuous phases[J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 2008, 51: 2389-2397.
- [7] XUE Q, XU W M. A model of thermal conductivity of nanofluids with interfacial shells[J]. Materials Chemistry and Physics, 2005, 90: 298-301.
- [8] 凤仪, 朱震刚, 陶宁, 郑海务. 闭孔泡沫铝的导热性能. 金属学报, 2003, 39(8): 817-820.
- [9] HADJOV K. Differential medium theory to predict the thermal conductivity of composites finite particle concentration[J]. J. University of chemical technology and metallurgy, 2008, 43(4): 438-442.
- [10] SIAU J F. Transport Processes in wood. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [11] 徐有明, 木材学. 北京: 中国林业出版社, 2006.
- [12] ASAKO Y, KAMIKOGA H, NISHIMURA H, et al. Effective conductivity of compressed woods. Int[J]. Int. Heat and mass transfer, 2002, 45(11): 2243-2253.
- [13] MAXWELL J C. treatise on electricity and magnetism[M]. 3rd ed. New York: Dover Publications Inc, 1954.
- [14] 施明恒, 李小川, 陈永平. 利用分形方法确定聚氨酯泡沫塑料的有效导热系数. 中国科学 E 辑 技术科学, 2006, 36(5): 560-568.
- [15] 郁伯铭. 分形介质的传热与传质分析(综述). 工程热物理学报, 2003, 24(3): 481-483.
- [16] 徐旭等. 木材导热系数非线性拟合的神经网络模型[J]. 浙江大学学报(工学版), 2007, 41(7): 1201-1204.
- [17] 俞自涛, 胡亚才, 田甜, 范利武. 木材横纹有效导热系数的分形模型[J]. 浙江大学学报(工学版), 2007, 41(2): 351-355.
- [18] MANDELBROT B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. San Francisco: Freeman, 1982.



- [19] KATZ A J, THOMPSON A H. Fractal sandstone pores: implications for conductivity and pore formation[J]. Physical Review Letters, 1985, 54(12): 1325-1328.
- [20] 夏德宏, 陈勇, 郭珊珊. 隔热纤维体的热导率分形模型[J]. 热科学与技术, 2008, 7(2): 97-103.
- [21] 钱壬章, 俞昌铭, 林文贵. 传热分析与计算[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [22] 帕坦卡 S V. 传热与流体流动的数值计算[M]. 张政译. 北京: 科学出版社, 1984.
- [23] 陶文铨. 数值传热学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.

## 第 5 章

### Chapter

# 含水非吸湿性多孔材料 加热及水分迁移

继上章讨论固气多孔材料之后,本章起讨论含水多孔材料。如第 1 章中提及,根据多孔材料中的固相是否吸收水分这一特征把含水多孔材料分为吸湿性与非吸湿性两大类。本章讨论含水非吸湿性多孔材料加热及水分迁移,图 5-1 为示意图。

与固气多孔材料相比,含水多孔材料有如下特征:其一,水以自由水的形态存在于多孔材料的孔隙内,整个多孔材料视为由直径大小不同的毛细管结构组成的一个网络,其二,材料内大量而分散的孔隙中存在水-固、水-气及固-气交界面,其三,在气相空间中,至少存在水蒸气与空气两种气体。正是这些基本特征决定了含水非吸湿性多孔材料内传热传质过程的特定规律。

这类非吸湿性多孔材料的应用背景包括诸如陶瓷材料、砂土以及由大量非吸湿性粒子聚集而成的多孔材料(如粉末冶金材料)等。孔隙的直径在微米( $\mu\text{m}$ )至毫米( $\text{mm}$ )范围。

本章 5.1 节与 5.2 节分别介绍水在多孔材料内的毛细管现象、多孔材料内水蒸气与空气的相互扩散以及液相水的渗流。在一定条件下,为便于数学描述,将渗流现象等效为扩散现象。在此基础上,结合图 5-1 所示典型情形,在 5.3 节、5.4 节与 5.5 节中分别介绍集总参数模型、一维扩散模型及一维扩散-蒸发模型。最终,在 5.6 节,对上述几种模型的特点进行小结与讨论。本章的重点是讨论如图 5-1 所示的一维情形,这里,多孔材料的底部与四周侧面与环境之间都是绝热的,传热传质只发生在与材料底面垂直的方向上。这一理想化的模式代表着一块长度与宽度比厚度大得多的板状材料在其上、下表面接受对称加热的实际情形(由于上、下对称只研究半块平板),也可近似认为一块潮湿砂土被热空气加热干燥的过程。

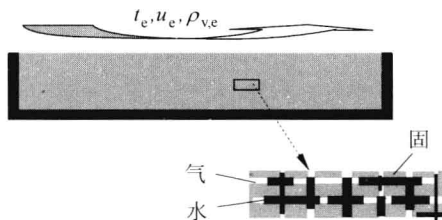


图 5-1 含水非吸湿性多孔材料空气  
对流加热示意图

## 5.1 液相水的表面性质

认识水表面的相关物理现象是认识水在多孔材料内存在形式与迁移行为的重要基础。

密切接触的两相之间的过渡区(大约几个分子层厚度,约 1 nm)称为界面,若两相中有一相是气体,则称表面。通常情况下,一个物体,或一个物系,界面层的分子总是比内部分子少得多,可忽略不计。但对多孔材料而言,由于其比表面很大,在其孔隙中存有液相水后,有大量的界面层,这些界面层分子与内部分子受力状况不同,出现界面现象,使液体表现出一些特殊的性质,对此必须予以考虑。本节扼要介绍与含水多孔材料相关的界面现象及水的性质的变化。读者欲更详尽了解,请参阅物理化学教材有关表面化学或表面现象相应章节<sup>[1-3]</sup>。

### 5.1.1 表面张力与表面能

任何一个相,其表面分子与内部分子所具有的能量是不相同的。图 5-2 所示是与其蒸气呈平衡的纯液体,图中圆圈代表分子引力范围。在液体内部的分子 A,因四面八方有同类分子均匀地包围着,受周围分子的引力对称,可相互抵消而总和为零。因此,它在液体内部移动时并不需要外界对它做功。而靠近表面的分子 B 及表面上分子 C,其处境与 A 大不相同。由于下面密集的液体分子对它的引力远大于上方稀疏气体分子对它的引力,所以所受引力不能相互抵消。这些力的总和垂直于液面而指向液体内部,即液体表面分子受到向内的拉力。这样,在没有其他作用力存在时,所有的液体都有缩小其表面积 of 自发趋势。相反,若要扩展液体表面,即把一部分分子由液体内部移到表面上来,则需要克服向内的引力而做功,此功称为表面功,即扩展表面而作的功,请看图 5-3 所示的例子。

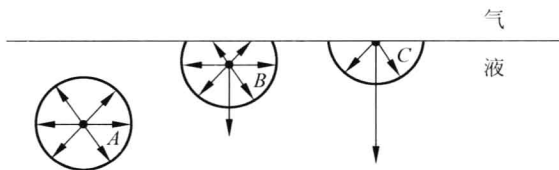


图 5-2 液体表面分子与内部分子受力状况

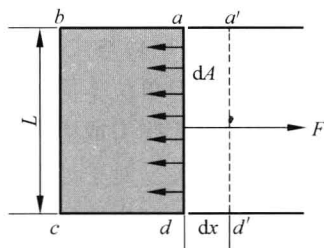


图 5-3 表面功与表面张力

将一由  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  围成的金属框浇上肥皂液后,再用力  $F$  拉动金属框上可移动的边  $ad$ ,使之移动  $dx$  距离至  $a'd'$ ,肥皂膜的表面积扩大  $dA$ ,在此过程中,环境(外力  $F$ )对系统(肥皂液膜)作的表面功  $dW$  与扩大的面积  $dA$  成正比,若以  $\sigma$  表示比例系数,则

$$dW = \sigma dA \quad (5-1-1)$$

表面功  $dW$  按其定义

$$dW = F dx \quad (5-1-2)$$

而扩展的表面积  $dA$  按其定义可写为

$$dA = 2L dx \quad (5-1-3)$$

式(5-1-3)中系数 2 是因为肥皂膜有两个表面。将式(5-1-1)稍加整理,再将式(5-1-2)与式(5-1-3)代入式(5-1-1),可得

$$\sigma = \frac{dW}{dA} = \frac{F}{2L} \frac{dx}{dx} = \frac{F}{2L} \quad (5-1-4)$$

式(5-1-4)表明, $\sigma$  是作用在单位长度上使液体面积缩小的力,称为表面张力,单位是  $N/m$ 。

表面扩展完成后,表面功转化为表面分子的能量,因此,表面上的分子比内部分子有更高的能量,其能量增量为  $dG$ 。若表面扩展过程可逆,则  $dW = dG$ 。式(5-1-4)又可写为

$$\sigma = \frac{dG}{dA} \quad (5-1-5)$$

式(5-1-5)表明, $\sigma$  的另一物理含义是:在定温定压条件下,增加单位表面积引起系统表面能(吉布斯函数) $G$  的增量。因此, $\sigma$  又称为表面吉布斯函数,简称表面能,单位为  $J/m^2$ 。

比较式(5-1-4)与式(5-1-5)可知,一种物质的表面张力与表面能两者量纲相同,数值相同,但单位不同,物理意义也不同。

液体的表面张力或表面能的大小与物质种类、与液体共存的另一相性质以及温度和压力有关。对于处在含水多孔材料孔隙内的水而言,水的另一相为空气与水蒸气。表 5-1 列出不同温度条件下饱和水的表面张力,表面张力随温度升高而下降。

表 5-1 不同温度条件下饱和水的表面张力<sup>[4]</sup>

温度/℃	10	20	40	60	80	100
表面张力 $\sigma$ /(N/m)	0.0744	0.0728	0.0693	0.0659	0.0624	0.0589

### 5.1.2 液相水其他表面现象

水平液面在表面张力作用下会呈现弯曲,而处于弯曲状态下液体表面具有与平面状态液体表面不同的物理现象,如弯曲液面会引起液面两侧压力不同,弯曲液面与平面液面在液面上对应的饱和水蒸气压力不同以及弯曲液面具有的毛细管现象等。

#### 5.1.2.1 弯曲液面附加压力

在环境压力  $p_e$  作用下,水平液面下液体所受的压力  $p_l$  等于  $p_e$ ,如图 5-4(a)所示。水平液面上的表面张力在水平面上,且相互抵消,不影响液面上、下压力。弯曲液面下的液体与平面下的液体不同。由于表面能的作用,液面有尽量缩小其表面积的趋势,这种趋势会使液面产生附加压力  $\Delta p$ ,如图 5-4 中(b)与(c)所示。

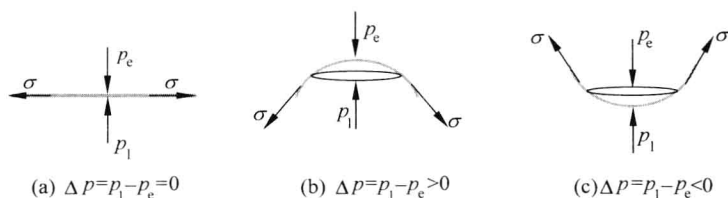


图 5-4 液体表面上的压力与表面张力

为推导附加压力的表达式,以球形液滴作为分析对象,为此,取图 5-4(b)中的球冠表示在图 5-5 中。球的半径  $r$ ,球冠拱底圆半径  $r_0$ , $r_0$  与  $r$  的夹角为  $\theta$ 。

作用于球冠拱底圆周上的表面张力  $\sigma$  可分解为沿水平方向的  $\sigma_{r_0} = \sigma \sin \theta$  与沿垂直方向的  $\sigma_z = \sigma \cos \theta$ 。沿拱底圆周上的  $\sigma_{r_0}$  可相互抵消,其合力为零。而垂直方向表面张力的合力为

$$F = 2\pi r_0 \sigma \cos \theta \quad (5-1-6)$$

球冠的球形表面上、下所受力的平衡关系为

$$2\pi r_0 \sigma \cos \theta + \pi r_0^2 p_e = \pi r_0^2 p_l \quad (5-1-7)$$

由式(5-1-7)可得液面下压力  $p_l$  与环境压力  $p_e$  之差,即弯曲液面附加压力  $\Delta p$  为

$$\Delta p = p_l - p_e = \frac{2\pi r_0 \sigma \cos \theta}{\pi r_0^2} = \frac{2\sigma \cos \theta}{r_0} = \frac{2\sigma}{r} \quad (5-1-8)$$

此式揭示了球型液滴表面内、外的压力差,也就是弯曲液面下的附加压力。称式(5-1-8)为拉普拉斯方程。

一般而言,描述一个曲面有两个曲率半径,则式(5-1-8)的一般形式为

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (5-1-9)$$

此式称为杨-拉普拉斯方程。

式(5-1-8)与式(5-1-9)是针对图 5-5 所示凸形液面推导的,但其结果也适用于凹形液面,只是其中液面曲率半径  $r$  取为负值。

总之,对照图 5-4 与图 5-5 可知,水平液面  $\Delta p = 0$ ,  $p_l = p_e$ ; 凸液面,  $\Delta p > 0$ ,  $p_l > p_e$ ; 凹液面,  $\Delta p < 0$ ,  $p_l < p_e$ 。多孔材料内液相水大都是凹液面。

关于式(5-1-8)的推导也可以用能量平衡的方法,详见文献[1~3]。

### 5.1.2.2 弯曲液面的饱和水蒸气压力

上述式(5-1-8)与式(5-1-9)反映了由于液面弯曲使弯曲表面液体侧(内侧)压力  $p_l$  与表面另一侧(外侧)环境处压力  $p_e$  不同。这种压力差是为了保证弯曲液面维持力的平衡。相应地,弯曲液面上的液相水与气相水蒸气的相平衡与平面液面上相平衡(参见图 3-9)也不相同。下面我们以图 5-6 所示一粒球形液滴为例,对液滴内液体饱和水蒸气压力与平面液体饱和水蒸气压力的关系进行讨论。

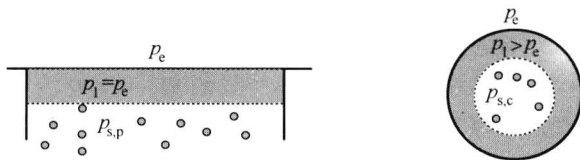


图 5-6 水平液面与弯曲液面下的饱和水蒸气压力

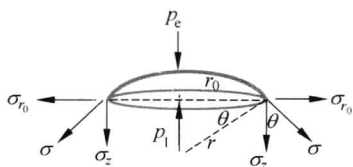


图 5-5 液体表面上、下压力差与表面张力

将 1 mol 的平面液体分散成半径为  $r$  的小液滴。在这个过程中,由于液面上表面张力做功使液滴内物质能量增加。它体现在两个方面。一方面,表面张力做功  $W$ ,表示为

$$W = V_m \Delta p \quad (5-1-10)$$

式中, $\Delta p$  为液滴内、外面上的压力差; $V_m$  是 1 mol 液体的体积, $V_m = M/\rho_l$  ( $\rho_l$  为液体密度, $M$  为液体摩尔质量),将式(5-1-8)代入式(5-1-10),则式(5-1-10)可改写为

$$W = \frac{2\sigma M}{r\rho_l} \quad (5-1-11)$$

另一方面,由平面液体变成液滴,液面上饱和水蒸气压力的能量增加,即吉布斯自由能增加  $\Delta G$ ,表示为

$$\Delta G = \int_{p_e}^{p_l} v dp \quad (5-1-12)$$

式中, $v$  是水蒸气比体积(specific volum); $p$  是液面上饱和水蒸气压力。对应于平面液体, $p_l = p_e$ , $\Delta G = 0$ 。对于小液滴弯曲液面, $p_l > p_e$ ,而比体积  $v$  按气体状态方程, $v = RT/p$ ,将它代入式(5-1-12),进行积分,可得

$$\Delta G = RT \ln \frac{p_l}{p_e} \quad (5-1-13)$$

式中, $p_e$  与  $p_l$  分别为平面液体与小液滴液体的饱和水蒸气压力,分别记作  $p_{s,p}$  与  $p_{s,c}$ ,下标  $s$  表示饱和(saturation), $p$  表示平面(plane), $c$  表示弯曲(curve)。根据  $W = \Delta G$ ,让式(5-1-11)与式(5-1-13)相等,可得

$$\ln \frac{p_{s,c}}{p_{s,p}} = \frac{2\sigma M}{r\rho_l RT} \quad (5-1-14)$$

式(5-1-14)称为开尔文方程。式中等号右边经量纲运算,所得为无量纲量。式(5-1-14)揭示了小液滴内液体饱和水蒸气压力  $p_{s,c}$  与平面液面下液体饱和水蒸气压力  $p_{s,p}$  之间的关系,它可改写为

$$p_{s,c} = p_{s,p} e^{\frac{2\sigma M}{r\rho_l RT}} \quad (5-1-15)$$

这个公式的推导是针对图 5-6 所示的被气相包围的液滴,但同时适用于被液相包围的气泡,只是式(5-1-15)中的半径  $r$  取为负号。

总之,当液体表面为平面时,曲率半径  $r$  为无穷大,自然数  $e$  的指数为 0,其值为 1,则  $p_{s,c} = p_{s,p}$ 。若液面为凸形(液滴), $r > 0$ , $p_{s,c} > p_{s,p}$ ,液滴内水蒸气压力大于

平面液体水蒸气压力,且 $r$ 越小,液滴内饱和水蒸气压力越大。若液面为凹形(气泡), $r < 0$ , $p_{s,c} < p_{s,p}$ ,气泡内水蒸气压力小于平面液体水蒸气压力,且 $r$ 越小,气泡内饱和水蒸气压力越小。多孔材料内液相水大都属于此类情形。

### 5.1.2.3 液体对固体表面的润湿与接触角

5.1.2.1 节和 5.1.2.2 节中讨论了液面与相邻气体的关系。这里,讨论液面与相邻固体的关系。

一滴液体放置于固体表面后,在固-液-气之间分别有固-液、固-气与液-气界面,图 5-7 是两种常见情形的一个剖面。在固-液-气三相相交的 $O$ 点处(其实是一条过 $O$ 点的封闭曲线),同时有分别表示为 $\sigma_{s-l}$ 、 $\sigma_{s-g}$ 与 $\sigma_{l-g}$ 的固-液、固-气与液-气三个表面张力的作用,这三个表面张力都趋于缩小各自的表面积,作用方向如图所示,其中液-气与固-液表面张力 $\sigma_{l-g}$ 与 $\sigma_{s-l}$ 的夹角称为接触角,记作 $\theta$ 。

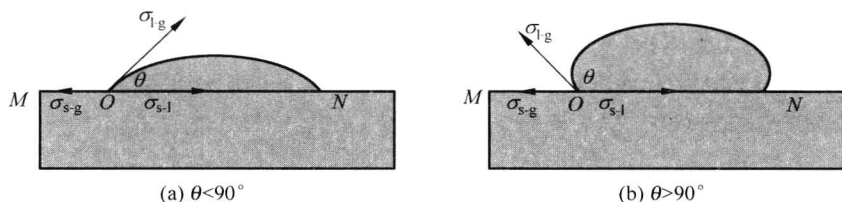


图 5-7 接触角与各表面张力的关系

如果上述三个表面张力在过 $O$ 点的直线 $MN$ 上的合力指向 $M$ 方向,如图 5-7(a)所示, $O$ 点会被拉向左方使液滴展开;若合力指向 $N$ 方向,如图 5-7(b)所示,则 $O$ 点会被拉向右方使液滴收缩。当液滴展开或收缩达到稳定时,表示三个表面张力相互平衡,合力为零,液滴保持一定形状,可表示为

$$\sigma_{s-l} + \sigma_{l-g} \cos \theta - \sigma_{s-g} = 0 \quad (5-1-16)$$

此时的接触角 $\theta$ 有确定的值,即将式(5-1-16)稍加整理可得

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{s-g} - \sigma_{s-l}}{\sigma_{l-g}} \quad (5-1-17)$$

根据接触角有确定值这一特征,人们常将接触角 $\theta$ 值的大小来衡量液体对固体的润湿程度。以 $90^\circ$ 为分界线,若 $\theta < 90^\circ$ ,则称润湿;若 $\theta > 90^\circ$ ,则称不润湿。若固体对某液体润湿,则称该固体为该种液体的亲液性固体,反之,则为该种液体的疏液性固体。



接触角  $\theta$  的值可由实验测定,也可按表面张力数据由式(5-1-17)求得。但需强调,用式(5-1-17)计算  $\theta$  值的前提必须是三个表面张力达到平衡。如果三个表面张力达不到平衡,若  $\sigma_{s-l} + \sigma_{l-g} - \sigma_{s-g} < 0$ ,则液体会在固体表面完全展开,如水在洁净的玻璃表面,称为完全润湿,也称铺展,此时取  $\theta = 0^\circ$ 。若  $\sigma_{s-l} + \sigma_{l-g} - \sigma_{s-g} > 0$ ,液体会在固体表面缩成圆珠,如汞在洁净的玻璃表面,此情形为完全不润湿,取  $\theta = 180^\circ$ 。

#### 5.1.2.4 毛细管现象

在 5.1.2.1~5.1.2.3 节的基础上,本小节讨论毛细管现象,讨论液体同时与气体及固体相邻的情形。

把半径为  $r$  的一根细管插入液体中,若液体能润湿管壁,管中将形成凹面( $\theta < 90^\circ$ ),液体在细管中上升;若不能润湿管壁,管中将形成凸面( $\theta > 90^\circ$ ),液体在细管中下降,如图 5-8 所示,这种液面在细管中上升或下降的现象为毛细管现象。

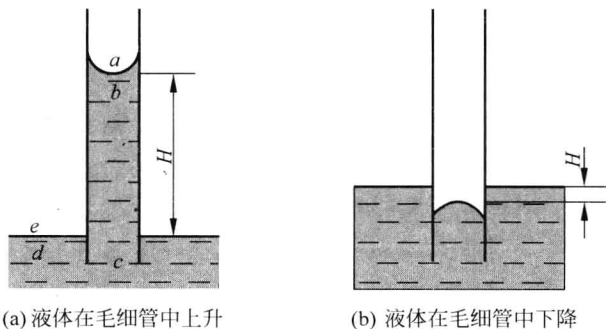


图 5-8 毛细管现象

以图 5-8(a)液体在毛细管中上升为例,分析图中标出  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  及  $e$  点处压力  $p_a$ 、 $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d$  与  $p_e$ 。 $a$  点与  $e$  点处于同一大气环境,则  $p_a = p_e$ ,这里忽略由于高度差而引起的大气环境压力的微小差别。 $e$  点与  $d$  点处于平面液体上、下两侧,它们的压力相同,则  $p_e = p_d$ 。 $d$  点与  $c$  点同处液体内同一水平高度, $p_c = p_d$ 。这样,点  $a$ 、 $c$ 、 $d$  与  $e$  四处的压力相同。 $b$  点与  $c$  点的压力不同,两者相差  $\rho_l g H$  ( $\rho_l$  为液体密度,  $g$  为重力加速度),即

$$\Delta p = p_b - p_a = -\rho_l g H \quad (5-1-18)$$

式(5-1-18)之成立是由于点  $b$  处在凹形液面下方,如图 5-4(c)所示,弯曲液面附加压力为负,  $\Delta p < 0$ 。将式(5-1-8)改成凹形液面,即,  $\Delta p = -2\sigma \cos \theta / r_0$ ,并代入式(5-1-18),可得

$$H = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho_l g r_0}$$

(5-1-19)

由式(5-1-19)可见,若液体对毛细管壁润湿, $0<\theta<90^\circ, 1>\cos\theta>0$ ,液体沿毛细管上升,上升高度与毛细管半径 $r_0$ 成反比;若液体对毛细管壁不润湿, $\theta>90^\circ, \cos\theta<0$ ,液体沿毛细管下降,下降高度也与毛细管半径 $r_0$ 成反比,如图5-8(b)所示。

5.1.2.5 毛细管内自由水与吸着水

表5-2所列在不同毛细管半径( $5\mu\text{m}\leq r_0\leq 1\text{mm}$ )条件下液面附加压力( $\Delta p$ )、毛细管水柱高度( $H$ )及凹形弯曲液面与相应平面液面上饱和水蒸气压力之比( $p_{s,c}/p_{s,p}$ )等数据是根据式(5-1-8)、式(5-1-19)与式(5-1-15)在 $\cos\theta=1$ 条件下计算得到的。也即,表中 $\Delta p$ 、 $H$ 与 $p_{s,c}/p_{s,p}$ 是在毛细管内弯曲液面曲率半径 $r$ 等于毛细管半径 $r_0$ 条件下得到的。由此, $\Delta p$ 与 $H$ 是最大可能的值, $p_{s,c}/p_{s,p}$ 是最小可能的值。由表中数据可知,从 $r_0<1\text{mm}$ 起,由于弯曲液面附加压力 $\Delta p$ 而引起毛细管水柱高度就很明显。这就是对于孔隙尺度比较小的多孔材料其中水分可均匀地分布在材料内的原因,例如含水的泥土、砖瓦、混凝土等。而对于孔隙尺度比较大的多孔材料,其中含有的水分大都沉积在材料的底部,整个材料内的水分分布呈现不均匀。例如,一块孔隙尺度比较大的泡沫塑料,将它从浸泡的水中拿出,包含在泡沫塑料内的水会流出滴落到地面,而包含在泡沫塑料内的水也会沉在泡沫塑料的底部。

表 5-2 毛细管半径对毛细管力及饱和水蒸气压力的影响

毛细管半径 $r_0/\mu\text{m}$	5	10	50	100	500	1000
附加压力 $\Delta p/100\text{ kPa}$	0.2912	0.1456	0.0291	0.0146	0.0029	0.0015
毛细管水柱高 $H/\text{m}$	2.971	1.486	0.297	0.149	0.030	0.015
相对饱和水蒸气压力 $p_{s,c}/p_{s,p}$	0.9998	0.9999	1.000	1.000	1.000	1.000

同样由表5-2中数据可知,在 $r_0>5\mu\text{m}$ 条件下,由于弯曲液面附加压力 $\Delta p$ 而引起的液面上饱和水蒸气压力的改变可以忽略。也就是说,就液面上饱和水蒸气压力而言,孔隙内弯曲的液面可视为平面液面。这样,只要液面上的湿空气环境未达到饱和状态,液面上的水就会蒸发直至全部水被蒸发完,犹如一杯水在相对湿度小于100%的环境中最终都会被完全蒸发一样。这正是把处在大毛细管中的水称为自由水的原因,也是把这种多孔材料称为非吸湿性多孔材料的原因。为此,对多孔材料内的自由水可作如下表述:在材料所处湿空气环境的相对湿度小

于 100% 条件下可无束缚而自由地蒸发的水为自由水。

请看表 5-3, 对  $r_0 < 1 \mu\text{m}$  的细小毛细管, 弯曲液面对饱和水蒸气压力的影响才逐渐表现出来。这样, 在具有微小毛细管的含水多孔材料内, 即便材料所处的湿空气环境未达到平面液体的饱和状态, 但对弯曲液面而言, 可能已达到饱和状态, 液面上水不再蒸发。也就是说, 在环境湿空气尚未达到饱和状态条件下, 多孔材料内的水可以永久地保持液相状态。这正是把处在微小毛细管中的水称为吸着水的原因, 也是把这种多孔材料称为吸湿性多孔材料的原因。为此, 对多孔材料内的吸着水可作如下表述: 在材料所处湿空气环境相对湿度小于 100% 条件下有束缚而不能自由地蒸发的水为非自由水, 也即吸着水。当然, 吸着水还有其他含义, 详见 6.1 节。

表 5-3 微小毛细管半径对饱和水蒸气压力的影响

毛细管半径 $r_0/\mu\text{m}$	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.1	1
相对饱和水蒸气压力 $p_{s,c}/p_{s,p}$	0.1163	0.3410	0.8064	0.8980	0.9893	0.9989

本章只讨论仅含自由水的非吸湿性多孔材料。

### 5.1.3 多孔材料内毛细管力分布及水的迁移

一般而言, 多孔材料可视为由毛细管纵横交错布置的复杂网络, 多孔材料内毛细管力(准确地说, 毛细管内弯曲液面下的压力)的分布紧密依赖于这一网络。然而, 对这复杂网络给予解析形式数学描述是相当困难的。为此, 把多孔材料视为几种几何形状相对简单的结构组成, 也就是, 对多孔材料给予模型化, 在模型化的结构中讨论毛细管力分布。

由于毛细管力与多孔材料的固相骨架对液相的浸润性有关, 对于亲液性的固体, 毛细管力为负, 而对疏液性固体, 毛细管力为正。下面的讨论都是针对亲水性多孔材料。

这里, 就图 5-9 与图 5-10 中所示两种典型结构分析水在毛细管中纵向与横向迁移的机理。

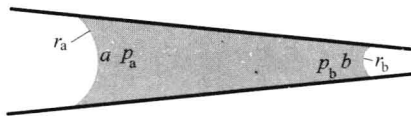


图 5-9 水平毛细管内水的纵向迁移

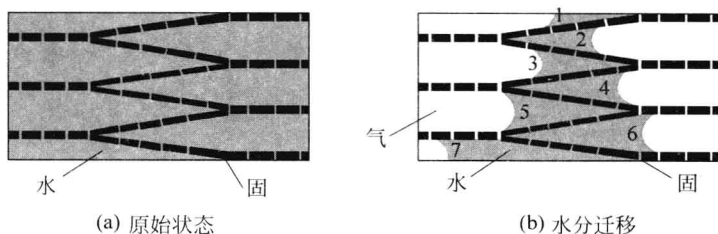


图 5-10 水平毛细管内水的横向迁移

图 5-9 所示为一有锥度的同心毛细管, 图中点  $a$  与点  $b$  处的毛细管力  $p_a$  与  $p_b$  分别为

$$p_a = (p_a - p_e) + p_e = \Delta p_a + p_e = -\frac{2\sigma}{r_a} + p_e \quad (5-1-20)$$

与

$$p_b = (p_b - p_e) + p_e = \Delta p_b + p_e = -\frac{2\sigma}{r_b} + p_e \quad (5-1-21)$$

点  $a$  与点  $b$  间液体的压力差  $\Delta p_{ab}$  是式(5-1-20)与式(5-1-21)之间的差, 即

$$\Delta p_{ab} = p_a - p_b = 2\sigma \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (5-1-22)$$

由于  $r_a > r_b$ , 则  $\Delta p_{ab}$  为正。在  $\Delta p_{ab}$  驱动下, 水平毛细管内的水将由宽端向窄端迁移。这就是水平毛细管内水分纵向迁移的机理。

图 5-10 是参照文献[5]插图经修改而成, 它是针叶木材中毛细管作用力驱使自由水沿毛细管横向迁移的示意图。

由图 5-10 可见, 这是彼此几乎平行的水平毛细管的组合, 自由水通过细胞壁上的纹孔相连, 以便彼此渗流。图 5-10(a) 表示木材处于原始状态, 自由水几乎充满细胞腔, 细胞腔内毛细管力几乎相同。当图示中木材上端暴露在高温环境中, 木材上端自由水受热蒸发而逐渐减少, 而后, 在木材内部逐渐出现由于细胞腔内水的弯曲面曲率半径不同而形成毛细管力分布, 即毛细管力梯度。这一梯度驱动着木材内部自由水向上端边界渗流。图 5-10(b) 表示木材干燥过程中自由水的分布及相应毛细管力的分布。图中点 1 至点 7 处液面压力, 即毛细管力的关系为

$$p_7 \approx p_6 \approx p_5 > p_4 > p_3 > p_2 > p_1 \quad (5-1-23)$$

其中, 在点 7、6 与 5 处液面毛细管力几乎相同。这是因为, 它们所处的弯曲液面的

曲率半径相同,而在点4、3、2与1处,由于细胞腔梢头处半径逐渐变小,液面的曲率半径变小,致使毛细管力逐渐变小。总之,多孔材料内毛细管力由下而上逐渐变小是驱动自由水在毛细管结构中横向迁移的机理。

根据毛细管力驱动水迁移的有关实验<sup>[6]</sup>表明,单纯靠毛细管力驱动并不能将毛细管材料内的自由水完全排除出材料。为此,引入了所谓束缚饱和度(irreducible saturation)这一概念。也就是说,单靠毛细管力驱赶,多孔材料内会有残留的水,这些水只能依靠蒸发来驱散。因此,束缚饱和度也称残余饱和度、临界饱和度等。本书使用临界饱和度,记作  $S_{l,c}$ 。

## 5.2 质(量)扩散及质(量)扩散方程

本节介绍的有关质扩散的内容将作为本章后几节的预备知识,它与第2章固体热传导相衔接。在第2章,讨论固体内部由于温度差而引起的热量传递,称热传导或热(量)扩散。在本节,介绍混合物中某组分由于浓度差而引起质量传递,称质(量)扩散<sup>[4]</sup>。工厂由烟囱排放含硫氧化物向大气环境扩散,由管道排放污水至静止湖水在湖水中的扩散都是典型的质扩散。含水多孔材料传热传质过程中更存在着气相中不同组分之间以及液相水在多孔材料内的扩散现象。

### 5.2.1 质扩散与费克定律

这一节与热扩散相对应,介绍质扩散的基本现象与基本规律。

#### 5.2.1.1 扩散现象基本物理模式

无论是热扩散或是质扩散,它们的基本物理模式都是分子运动。图5-11所示为A、B温度不同( $t_B > t_A$ )的两物体相互紧密接触后,由于分子扩散在两物体内部形成的温度分布  $t(x)$ 。

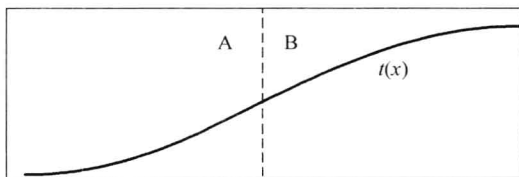


图 5-11 温度不同两物体间热扩散

图 5-12 为质扩散过程示意图。设有将一室均分两半的隔板使 A 与 B 两种气体分别处于隔板的各一侧。若将整个隔板(或隔板的一部分)移出室外, A、B 两种气体都会向另一半空间进行扩散, 使 A、B 两种气体的浓度形成分布  $C_A(x)$  与  $C_B(x)$  如图中所示。

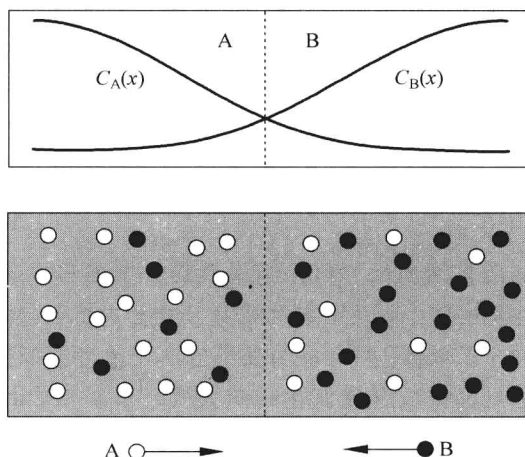


图 5-12 双组分气体混合物内的质扩散

当然, 当时间足够长时, 图 5-11 中两物体的温度会趋于相同, 图 5-12 中两种气体的浓度也都趋于各自的稳定值。

与温度概念相比, 组分浓度这一概念要复杂些。为此, 作以下说明。

### 5.2.1.2 混合物中各组分浓度

狭义而言, 混合物是指由多种气体组成的气体混合物, 如湿空气。广义而言, 混合物可以由固相、液相与气相共同组成, 如含水多孔材料。无论是狭义还是广义的混合物, 组分浓度这一概念是一致的。这里先介绍气体混合物中各组分浓度的表示。

由多组分组成的混合气体中的某一组分  $i$  所含有的量可用质量密度  $\rho_i$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) (即单位体积内组分  $i$  的质量) 或用摩尔浓度  $C_i$  ( $\text{kmol}/\text{m}^3$ ) (即单位体积内组分  $i$  的摩尔数) 来表示。它们两者间的关系由摩尔质量  $M_i$  ( $\text{kg}/\text{kmol}$ ) 联系。

$$\rho_i = M_i C_i \quad (5-2-1)$$

混合气体的密度  $\rho$ , 即单位体积内混合气体的质量, 可表示为

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad (5-2-2)$$

相应地,混合气体的摩尔浓度  $C$ ,即单位体积内混合气体的摩尔数,可表示为

$$C = \sum_i C_i \quad (5-2-3)$$

如果说,用相对值  $\rho_i/\rho$  表示某种气体在混合气体中的相对质量,或质量份额,那  $C_i/C$  表示某种气体在混合气体中的相对体积,或体积份额。在广义的混合物中,某一组分占整体的份额,也常用相对质量或相对体积来表示,如 1.1.3 节中所述,含水多孔材料中水所占有的相对份额,或用含水率  $W$  表示相对质量,或用水的饱和度  $S_l$  表示相对体积。

### 5.2.1.3 费克定律与质扩散率

与傅里叶定律式(2-1-8)所示热流密度(热扩散流率)向量相对应,双组分(A与B)混合气体中某一组分的质量流密度(质扩散流率)向量可表示为

$$\mathbf{q}_{m,i} = -D_{ab} \nabla \rho_i \quad (5-2-4)$$

或

$$\mathbf{q}_{m,i}^* = -D_{ab} \nabla C_i \quad (5-2-5)$$

式(5-2-4)与式(5-2-5)都称为费克定律,其中质量流密度  $\mathbf{q}_{m,i}$  与  $\mathbf{q}_{m,i}^*$  分别为单位时间内流过垂直于组分  $i$  的浓度梯度单位面积的质量与摩尔数量。上述两式中  $D_{ab}$  为双组分气体中组分  $i$  (A 或 B) 的质扩散率。

尽管将质扩散与热扩散进行对比后,顺理成章地获得并认识了费克定律,但正确运用费克定律比傅里叶定律要困难得多。为此,有两点需特别提醒。其一,在密实固体中热量传递的驱动力仅仅是温度梯度,但在多组分的气体中,某一组分质量传递的驱动力,除了该组分的浓度梯度之外,还可能是温度梯度、压力梯度,甚至外力。这样,在运用费克定律时,或忽略除了浓度梯度以外的其他因素的存在,或对其他因素作正确的处理。其二,式(5-2-4)与式(5-2-5)所示费克定律成立的前提是,把坐标系建立在混合气体的平均速度上。也就是,只有当混合气体没有整体运动时,上述费克定律才成立。幸好,对大多数多孔材料传热传质问题这个条件可以满足。

在式(2-1-8)所示傅里叶定律中,联系热焓梯度与热流密度向量的物理量是热扩散率  $a$ ,常用单位为  $\text{m}^2/\text{s}$ ,而在费克定律中,联系浓度梯度与质量流密度向量的物理量则是质扩散率  $D_{ab}$ ,常用单位也为  $\text{m}^2/\text{s}$ 。对于各类由 A 与 B 两种气体组成的双组分混合气体,A 对 B 的质扩散率由实验测得,如水蒸气对干空气质扩散

率  $D_{ab} = 0.26 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

对双气体混合体的质扩散率也有理论公式,按理想气体动力学,质扩散率与压力及温度的关系可表示为

$$D_{ab} \propto p^{-1} T^{3/2} \quad (5-2-6)$$

式中,压力  $p$  的单位为 Pa;  $T$  为开尔文温度(K)。应该说,式(5-2-6)也只是一种估算公式,在一定范围内,理论计算与实验值比较吻合。

### 5.2.2 质量守恒与质扩散方程

在固体导热中,导热方程的推导是基于能量守恒原则。在气体扩散中,质扩散方程的推导则基于质量守恒原则。

与第 2.2 节中介绍的导热方程推导过程相仿,质扩散方程的推导可以在一般坐标系或特定坐标系下进行。为节省篇幅,推导过程不再重复,这里用与热传导方程对照的方式,直接写出质扩散方程。

对应于一般坐标系下的导热方程式(2-2-11),可得质扩散方程为

$$\nabla \cdot (D_{ab} \nabla \rho_i) + \dot{m}_{v,i} = \frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} \quad (5-2-7)$$

而对应于直角坐标系下导热方程式(2-2-22),可得质扩散方程为

$$D_{ab} \left( \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial z^2} \right) + \dot{m}_{v,i} = \frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} \quad (5-2-8)$$

式(5-2-7)与式(5-2-8)的物理含义是:对于混合气体内任意位置,单位时间单位体积内组分  $i$  物质质量的增加(等号右边)是由于以质扩散形式在单位时间内通过该单位体积边界传入的质量(等号左边第 1 项)与该单位体积内在单位时间所释放的质量(等号左边第 2 项)之和。其中  $\dot{m}_{v,i}$  称为物质源项,是组分  $i$  物质在单位时间单位体积(由下标  $v$  表示)内增加的质量,如空气与水蒸气混合气体中,视水蒸气为  $i$  物质,则由于液相水蒸发( $\dot{m}_{v,i} > 0$ )或水蒸气凝结( $\dot{m}_{v,i} < 0$ )由此引出  $\dot{m}_{v,i}$ 。这里的  $\dot{m}_{v,i}$  与式(2-2-22)中的  $q_v$  相对应。

与求解导热方程相仿,求解质扩散方程同样需要有定解条件。

### 5.2.3 多孔材料中质扩散

如前所述,质扩散的概念与理论起源于双组分气体中某一组分气体对另一组分气体的质量扩散。至于气体或液体在固体介质内的质量扩散,在实验与理论研究方面都尚嫌不足,要准确描述其中过程至今仍相当困难。但在理解气体扩散的



基础上,还是可能按照对比的方式,对气体扩散公式加以修改后应用到气体或液体在多孔材料内的扩散过程。

### 5.2.3.1 气体在多孔材料内扩散

若多孔材料的孔隙内存在两种组分(如水蒸气与空气)组成的混合气,当材料经历加热过程时,其中某组分的气体可能在其浓度梯度推动下出现质扩散。其质扩散流率(质量流密度)仍可仿式(5-2-4),写得

$$q_{m,i} = -D_{ab}^* \nabla \rho_i^{**} \quad (5-2-9)$$

式中,  $\rho_i^{**}$  是每单位体积多孔材料内组分  $i$  气体的质量,应理解为

$$\rho_i^{**} = \phi \rho_i \quad (5-2-10)$$

这里的  $\phi$  是体积孔隙率,  $q_{m,i}$  是单位时间内流过与多孔材料内组分  $i$  浓度梯度垂直面上单位面积的气体质量,应理解为

$$q_{m,i} = \phi q_{m,i}^* \quad (5-2-11)$$

这里的  $\phi$  是面积孔隙率,  $q_{m,i}^*$  是孔隙中气体组分  $i$  真实质量流密度。将式(5-2-10)代入式(5-2-9),可得

$$q_{m,i} = -D_{ab,s} \nabla \rho_i \quad (5-2-12)$$

式中  $D_{ab,s} = D_{ab}^* \phi$  理解为气体在多孔材料中的质扩散率。若该气体为水蒸气,则质扩散率记作  $D_{vs}$ ,下标  $vs$  表示水蒸气在固体中的扩散。若该气体为空气,则质扩散率记作  $D_{as}$ 。显然,多孔材料孔隙内气体的质扩散率不同于单纯混合气体中的质扩散率,即这里的  $D_{vs}$  不同于式(5-2-4)中的  $D_{ab}$ ,  $D_{vs}$  将有赖于多孔材料固相骨架的结构形式,其值由实验确定<sup>[7,8]</sup>。如果多孔材料被简化成一组与质扩散方向一致且相互平行的管网,气体扩散通道为面孔隙率  $\phi$ ,则  $D_{vs}$  可表示为

$$D_{vs} = \phi D_{ab}$$

对于实际多孔材料,  $D_{vs}$  表示为

$$D_{vs} = \zeta \phi D_{ab} \quad (5-2-13)$$

这里系数  $\zeta$  是一个小于 1 且有实验确定的值。

应该提及,由于质扩散本质是分子运动,对于一般视为密实的固体,气体也有一定扩散的能力,只是质扩散率的值要小得多<sup>[4]</sup>。如在室温条件下,氢气在空气中的质扩散率为  $0.41 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,氢气在铁内的质扩散率为  $0.26 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ 。两者相差高达 8 个数量级。

关于气体在多孔材料内的扩散方程,对照式(5-2-7),仍以水蒸气为例,写得扩散方程为

$$\phi \frac{\partial \rho_v}{\partial \tau} = \nabla \cdot (D_{vs} \nabla \rho_v) + \dot{m}_s A_{ls} \quad (5-2-14)$$

式(5-2-14)中的  $\rho_v$  是水蒸气在多孔材料内的真实密度,即单位气体体积内水蒸气的质量。在关于水蒸气密度梯度的表示中,将孔隙率的影响归结到质扩散率  $D_{vs}$  中去了。式中  $A_{ls}$  为单位多孔材料体积内所具有的液-气交界面积,而  $\dot{m}_s$  则是交界面上单位面积在单位时间内蒸发的水的质量,两者的乘积  $\dot{m}_s A_{ls}$  即为式(5-2-7)中的  $\dot{m}_{v,i}$ 。在实际使用中,式(5-2-14)常简化成

$$\phi \frac{\partial \rho_v}{\partial \tau} = \nabla \cdot (D_{vs} \nabla \rho_v) + \dot{m}_v \quad (5-2-15)$$

### 5.2.3.2 液相水在多孔材料内扩散与渗流

当两块含水量程度不同的多孔材料(或者一块多孔材料含水量程度不同的两部分)紧密地接触时,过程的自发趋向是液相水将由含水量多的地方向含水量少的地方传输,实现质量的迁移。这种质量迁移的驱动力是多孔材料内毛细管力分布,而毛细管力分布与多孔材料结构紧密相关。由于对实际多孔材料要准确地描述毛细管结构往往十分困难,因此,直接由毛细管力分布来表示液相水的迁移也就十分困难。下面的事实给出了对液相水的迁移进行定量描述的可能性。

两块有一定厚度的用泥土制成的平板,一块潮湿,另一块干燥。现将两块泥土平板紧密地重叠在一起,经过一段时间后,潮湿的泥土会干燥些,干燥的泥土会潮湿些。不难理解,其中水分从潮湿泥土向干燥泥土的传输过程犹如图 5-11 所示的热扩散与图 5-12 所示的气体扩散,两块泥土沿厚度方向含水程度的分布如同图 5-11 中的温度分布与图 5-12 中的气体浓度分布。由此,人们认为,多孔材料中液相水的质量流密度与液相水分布的浓度梯度成正比。这里所言的液相水分布的浓度不是指液相水本身的密度。一般而言,液相水本身密度是常数,并不存在分布。液相水分布的浓度是指单位体积内含水量多少。关于单位体积内含水量,在 1.1.3 节中已有介绍,如式(1-1-15)所示,单位体积内水的质量可表示为  $\rho_l \phi S_l$ , 这里的  $\phi$  是体积孔隙率,  $\rho_l$  是液相水真实密度,  $S_l$  是水在孔隙中饱和度。

总之,对照气体中扩散定律式(5-2-4),把液相水在多孔材料中的扩散规律表示为

$$q_l = - D_{ls} \nabla \rho_l \phi S_l \quad (5-2-16)$$

或

$$\mathbf{q}_l = -D_{ls}\rho_l\phi\nabla S_l \quad (5-2-17)$$

式中  $\mathbf{q}_l$  为液相水质量流密度向量(对应于热流密度向量),即单位时间流过垂直于液相水分布的浓度梯度单位面积的质量 $[\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$ ,  $D_{ls}$ 是液相水在多孔材料中的质扩散率,表 5-4 列出了几种工程材料中水的质扩散率<sup>[9]</sup>。

表 5-4 几种工程材料中水的质扩散率

材料名称	密度 $\rho_l/(\text{kg}/\text{m}^3)$	温度 $t/^\circ\text{C}$	含水率 $W/(\text{kg}/\text{kg})$	扩散率 $D_{ls}/(\text{m}^2/\text{s})$
石棉混凝土	390	20	0.1	$3.89 \times 10^{-9}$
			0.2	$8.89 \times 10^{-9}$
			0.3	$1.72 \times 10^{-8}$
			0.4	$2.19 \times 10^{-8}$
			0.5	$2.31 \times 10^{-8}$
			0.6	$2.31 \times 10^{-8}$
矿物棉	200~800	20	0.2	$2.50 \times 10^{-9}$
			1.0	$1.08 \times 10^{-8}$
			1.4	$1.33 \times 10^{-8}$
			1.8	$1.56 \times 10^{-8}$
陶土		45	0.1	$2.50 \times 10^{-8}$
			0.2	$6.94 \times 10^{-8}$
			0.4	$1.28 \times 10^{-7}$
			0.5	$1.31 \times 10^{-7}$
石英砂		45	0.05	$1.94 \times 10^{-7}$
			0.1	$3.33 \times 10^{-7}$
			0.15	$5.77 \times 10^{-7}$
木材		40	0.1	$0.5 \times 10^{-9}$
			0.25	$1.28 \times 10^{-9}$
			0.5	$1.72 \times 10^{-9}$
			0.75	$1.72 \times 10^{-9}$

对照气体在多孔材料中扩散方程式(5-2-14),可得液相水质量扩散方程如下:

$$\phi_{\rho_l} \frac{\partial S_l}{\partial \tau} = \nabla \cdot (D_{ls} \nabla \phi_{\rho_l} S_l) - \dot{m}_v \quad (5-2-18)$$

或

$$\phi_{\rho_l} \frac{\partial S_l}{\partial \tau} = \phi_{\rho_l} \nabla \cdot (D_{ls} \nabla S_l) - \dot{m}_v \quad (5-2-19)$$

若不计内部蒸发,质扩散率  $D_{ls}$  为常数,且扩散只发生在一个方向( $x$  方向),则式(5-2-19)简化为

$$\frac{\partial S_l}{\partial \tau} = D_{ls} \frac{\partial^2 S_l}{\partial x^2} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 S_l}{\partial x^2} = \frac{1}{D_{ls}} \frac{\partial S_l}{\partial \tau} \quad (5-2-20)$$

式(5-2-20)与热扩散方程(2-2-28)在形式上完全相同。

从表 5-4 中数据可见,对每一种含水多孔材料,水的质扩散率都与含水率有关,关于这一认识在不少文献中也有报道<sup>[8-10]</sup>。一般而言,扩散率随含水率增加而增加。

这里讨论的关于液相水在多孔材料内的扩散与 5.1.3 节中讨论的毛细管力驱动自由水的渗流,两者之间并不矛盾。相反,两者一致。

按 5.1.3 节的论述,液相水渗流速度  $u$  如式(4-2-17)所示,为

$$u = - \frac{K}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5-2-21)$$

从图 5-10 分析中看到,毛细管力  $p$  与液相水在孔隙内饱和度  $S_l$  之间的关系是,随  $S_l$  减少,  $p$  下降。不妨,假定两者之间为成正比关系,即

$$p = c_1 S_l \quad (5-2-22)$$

其中,  $c_1$  是比例系数。将式(5-2-22)代入式(5-2-21),可得

$$u = - \frac{K c_1}{\eta} \frac{\partial S_l}{\partial x} \quad (5-2-23)$$

液相水渗流过程应遵循质量守恒原则,即满足如下连续方程

$$\frac{\partial \phi S_l \rho_l}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho_l u}{\partial x} = 0 \quad (5-2-24)$$

将式(5-2-23)代入式(5-2-24),则式(5-2-24)成为

$$\frac{\partial S_l}{\partial \tau} = \frac{K_{c_l}}{\phi \eta} \frac{\partial^2 S_l}{\partial x^2} \quad (5-2-25)$$

若将式(5-2-25)中的  $K_{c_l}/\phi\eta$  理解成液相水在多孔材料中质扩散率,则式(5-2-25)液相水扩散与式(5-2-20)完全一致了。

综上所述,为了理解液相水在多孔材料内迁移的机理,在一定条件下,对多孔材料结构进行模型化处理后,可将(1)液相水饱和度与毛细管力、(2)液相水饱和度梯度与毛细管力梯度及(3)达西定律与费克定律三方面统一起来,也就是说,把多孔材料内液相水的渗流理解为液相水的扩散。或者说,用扩散方程来表示液相水的渗流过程。

### 5.3 集总参数模型及数值分析

自本节起,结合图 5-1 所示情形,按由易及繁原则,建立不同型式的数学模型。本节讨论集总参数模型。

关于集总参数模型在第 3 章的 3.3.3 节已有所介绍。其要点是,把原本在一定空间范围内某参数的分布(如温度分布)人为地予以集总,也就是说,用某种平均值来代替分布<sup>[11]</sup>。相应地,把原本描述该参数在时间与空间范围内变化的偏微分方程退化为只含时间的常微分方程,使问题得以简化。集总参数的方法只是将对空间的分布简化为集总,而不是将若干个参数集中为一个参数。应该说,在一定条件下,如被研究的物体尺度较小,过程又比较缓慢,采用集总参数法是恰当的。本章介绍集总参数法其重点在于,在忽略参数在空间的分布之后,有利于分析各参数相互之间的联系,尤其是,便于了解影响过程的诸多因素中哪些是主要因素。

本节讨论的对象为如图 5-1 所示的厚度为  $H$ 、上表面积为  $A$  的平板形多孔材料。

#### 5.3.1 物理模型

建立物理模型,就是在对被研究的过程进行定性描述基础上引入若干简化假定,以便建立定量分析所需要的数学模型。

##### 5.3.1.1 定性描述

如图 5-1 所示,当一块含水多孔材料置于与其温度不同的环境之中,材料内部及材料与环境之间立即开始传热传质过程。

从传热角度看,由于环境温度高于材料初始温度,环境以对流传热方式向材料传热;从传质角度看,若材料表面水蒸气密度高于环境中水蒸气密度,环境与材料之间以对流传质的方式将水蒸气由材料表面传输给环境,材料表面处水蒸气质量的迁出由材料表面液相水的蒸发与内部液相水的迁移和蒸发进行补偿。在材料与环境之间发生传热传质过程中,材料内部的气体压力将发生变化,环境与材料内部气体压力的差别将引起气体流动,流动方向取决于环境与材料内部的气体压力的高低。在受热开始时,材料的温度低于环境温度,材料内气体中的干空气的密度大于环境中干空气密度,又由于材料内部的水蒸气处于饱和状态,其密度也大于环境中水蒸气密度。这种密度差将引起干空气与水蒸气由材料内部向环境扩散。这样,在材料表面两侧,一方面,由于气体压力差而驱动混合气体流动,另一方面,由于干空气与水蒸气在两侧的密度差而驱使干空气与水蒸气的质扩散。

在上述这样综合而复杂的传热传质过程中,涉及 11 个因变量随时间的变化。它们是液相水饱和度  $S_l$ 、表面蒸发率  $\dot{m}_s$  与体积蒸发率  $\dot{m}_v$ 、材料与环境间气体渗流速度  $w$ 、材料温度  $t$  以及材料内气相参数中干空气、水蒸气和混合气体密度与压力  $\rho_a$ 、 $\rho_v$ 、 $\rho_g$  与  $p_a$ 、 $p_v$ 、 $p_g$ 。这 11 个因变量相互间是耦合的。

随着环境不断地向材料传输热量,材料内部液相水不断地被蒸发,到一定时间后,材料内的液相水被完全蒸发,上述 11 个因变量耦合的过程结束,标志着材料传热传质过程的第一时期结束,从而进入第二时期,材料孔隙内只有干空气与残存的水蒸气,上述 11 个因变量中的液相水饱和度  $S_l$ 、表面蒸发率  $\dot{m}_s$  与体积蒸发率  $\dot{m}_v$  自行消失。在第二时期中只涉及 8 个因变量随时间的变化。

为了分析上述两个时期中各自因变量之间的定量联系,还必须引入若干简化假定。

### 5.3.1.2 若干简化假定

假定 1,多孔材料中固相骨架不吸(含)水,在材料被加热过程中,固相骨架的体积与质量保持不变,即刚性固相骨架。

假定 2,固相骨架对水润湿,即固相为亲液性固体,则多孔材料内相互连通的大小孔隙犹如众多毛细管,水在毛细管力作用下,有可能停留在多孔材料的任意位置,如图 5-13(a)所示,水与空气(包含水蒸气)之间的分界面将分散在多孔材料内部各处。在集总参数模型中,把图 5-13(a)中固、水与空气三相分散结构简化成图 5-13(b)所示的固、水与空气集总型结构。

假定 3,在材料被加热的过程中,材料内固相骨架、液相水与气相的空气与水蒸气,固-液-气三相之间,存在着传热,固-液-气三相的温度不尽相同。但考虑到多孔材料孔隙细小,比面积很大,它们间的温度差别很小而予以忽略。在集总参数

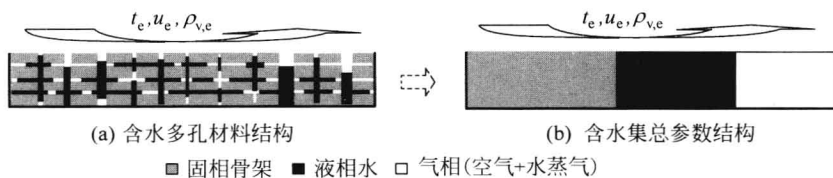


图 5-13 含水多孔材料结构模型化

模型中,更是视整个材料为一个温度,空间分布的因素消失,它只是时间的函数。把图 5-13(b)的结构抽象地想象成一个点,固-液-气都占据这个点。因此,集总参数模型也称零维模型。

假定 4,液相水与水蒸气共存的孔隙内部,它们处于热力学平衡状态,孔隙中水蒸气的压力与密度为液相水温度(等于材料温度)对应的饱和水蒸气压力与饱和水蒸气密度。这样,随材料温度升高,材料内水蒸气压力与水蒸气密度也相应升高。

假定 5,当液相水被完全蒸发后,材料内的干空气与残存的过热水蒸气被认为是理想气体,它们的行为服从理想气体规律。

假定 6,加热后材料内的混合气体与环境中的空气存在压力差,在这种压力差推动下,气体的渗流服从达西定律。在集总参数模型中,达西速度理解为穿过材料表面的速度。

### 5.3.2 数学模型

建立数学模型,就是在物理模型基础上,根据质量守恒、动量守恒与能量守恒原则以及热力学关系式,建立上述 11 个因变量的控制方程与相应定解条件。

#### 5.3.2.1 质量守恒

针对多孔材料中的固相骨架、液相水与气体分别建立各自的质量守恒方程。

##### 1. 固相

根据物理模型中假定 1,固相骨架的质量在传热传质过程中保持不变,可表示为

$$\frac{dAH(1-\phi)\rho_s}{d\tau} = 0 \quad (5-3-1)$$

由于不计固相骨架几何形状的变化,式(5-3-1)中多孔材料平板的表面积  $A$ 、高度  $H$ 、孔隙率  $\phi$  与固相骨架密度  $\rho_s$  都是不随时间变化的常数。这样,此方程不单独以控制方程出现在数学模型中。

## 2. 液相

多孔材料中液相的水在材料接受加热过程中由于在表面与内部均有液相水的蒸发使其质量不断变化,即

$$AH\phi\rho_l \frac{dS_l}{d\tau} = -\dot{m}_s A - \dot{m}_v AH \quad (5-3-2)$$

式(5-3-2)等号左边表示多孔材料平板内水的质量在单位时间内的变化。平板内水的质量是液相水密度  $\rho_l$  与水占有体积  $V_l$  的乘积,  $V_l = AH\phi S_l$ ,  $S_l$  是液相水的饱和度,即水在孔隙中占有的体积份额。由于  $A$ 、 $H$ 、 $\phi$  与  $\rho_l$  在多孔材料平板被加热过程中均为常数,它们均置于微分号外,只有液相水饱和度  $S_l$  作为因变量,置于微分号下,故式(5-3-2)即为液相水饱和度  $S_l$  的控制方程。

式(5-3-2)等号右边第一项为液相水在平板表面处向环境空气在单位时间内蒸发的质量。其中  $\dot{m}_s$  是多孔材料表面处的蒸发率 [ $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ ],表示为式(3-2-24),此处改写为

$$\dot{m}_s = h_m(\rho_v - \rho_{v,e}) \quad (5-3-3)$$

式(5-3-3)即为  $\dot{m}_s$  的控制方程。严格地讲,这里的式(5-3-3)不同于式(3-2-24)。因为,多孔材料的实际蒸发表面积不同于平静水表面积,但作为一种模型,这里就不计实际蒸发表面积与材料表面积的差别。此外,作为集总参数模型,材料表面的水蒸气密度即为材料内部水蒸气密度,式(5-3-3)中的  $\rho_v$  替代了式(3-2-24)中的  $\rho_{v,s}$ 。

式(5-3-2)等号右边第二项为液相水在材料内部单位时间内蒸发的质量,其中  $\dot{m}_v$  是材料内部单位体积内液相水的蒸发率 [ $\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$ ]。

## 3. 气相

多孔材料内气相介质包括空气与水蒸气,它们的质量守恒方程分别介绍如下。

### (1) 空气

多孔材料中所含的空气质量在材料受热后因渗流与扩散而发生变化,其质量守恒表示为

$$AH\phi \frac{d(1-S_l)\rho_a}{d\tau} = D_{as}A \frac{\rho_{a,e} - \rho_a}{H/2} - w\rho_a A \quad (5-3-4)$$

式中,等号左边是多孔材料平板内空气质量在单位时间内的变化量;等号右边第一



项为环境与材料内部由于空气密度差而引起的在单位时间内通过平板表面由环境扩散到材料内部的空气质量,其中  $D_{as}$  为空气在固相中质扩散率,  $\rho_{a,e}$  与  $\rho_a$  分别为材料外部环境与内部的空气密度;等号右边第二项为由空气渗流引起的在单位时间内通过表面的空气质量,其中  $w$  是气体流动速度(达西速度),  $w$  的正方向为气流从材料内部流向环境。式(5-3-4)经整理可写为

$$\frac{d(1-S_l)\rho_a}{d\tau} = 2D_{as} \frac{\rho_{a,e} - \rho_a}{\phi H^2} - \frac{w\rho_a}{\phi H} \quad (5-3-5)$$

若上式中的  $w$  为负值,  $w < 0$ , 表示气流由环境流向平板内部, 则与  $w$  相乘的空气密度应为  $\rho_{a,e}$ 。

应注意, 上述空气在多孔材料中质扩散率  $D_{as}$  与单纯双组分混合气体中相互扩散的质扩散率  $D_{ab}$  的关系, 对照式(5-2-13), 可表示为

$$D_{as} = \zeta D_{ab} \phi (1 - S_l)$$

式中,  $\phi(1 - S_l)$  表示单位面积内可能形成气体扩散通道的面积; 系数  $\zeta$  则是反映气体在多孔材料内扩散特征的量。至今, 针对类型繁多的多孔材料还难以给出确定的数值, 有待实验研究积累<sup>[7,8]</sup>。

式(5-3-4)或式(5-3-5)为多孔材料中空气质量或空气密度的控制方程。

## (2) 水蒸气

多孔材料中所含的水蒸气质量在材料受热后因液相水蒸发与渗流而发生变化, 其质量守恒表示为

$$AH\phi \frac{d(1-S_l)\rho_v}{d\tau} = \dot{m}_v AH - w\rho_v A - D_{vs} \frac{\rho_v - \rho_{v,e}}{H/2} A \quad (5-3-6)$$

式(5-3-6)等号左边为多孔材料内水蒸气的质量在单位时间内的变化量; 等号右边第一项为平板内由于孔隙中液相水蒸发在单位时间内产生的水蒸气质量; 等号右边第二项为由水蒸气渗流引起的单位时间由平板内部通过平板表面流向外部环境的水蒸气质量; 等号右边第三项为由材料内部向环境的水蒸气扩散而引起的单位时间通过平板表面扩散到环境的水蒸气质量, 其中,  $\rho_{v,e}$  与  $\rho_v$  分别为材料外部环境与水蒸气密度。

式(5-3-6)经整理可写为

$$\frac{d(1-S_l)\rho_v}{d\tau} = \frac{\dot{m}_v}{\phi} - \frac{w\rho_v}{\phi H} - 2D_{vs} \frac{\rho_v - \rho_{v,e}}{\phi H^2} \quad (5-3-7)$$

根据物理模型中假定4, 多孔材料孔隙中的水蒸气密度取决于多孔材料中是

否存在液相水,当水的饱和度  $S_l > 0$  条件下,它是当地温度对应下的饱和水蒸气密度,或者说,水蒸气密度唯一取决于温度。因此,式(5-3-6)并不是关于水蒸气密度  $\rho_v$  的控制方程,而是作为材料内部液相水体积蒸发率  $\dot{m}_v$  的控制方程。为此,将式(5-3-7)改写成

$$\dot{m}_v = \phi \frac{d(1 - S_l)\rho_v}{d\tau} + \frac{w\rho_v}{H} + 2D_{va} \frac{\rho_v - \rho_{v,e}}{H^2} \quad (5-3-8)$$

对式(5-3-8)的理解是,单位时间单位体积内液相水转化为水蒸气的质量由如下三部分组成:其一,单位时间单位体积内水蒸气质量的增加;其二,单位时间单位体积内以渗流方式由材料流向环境的水蒸气质量;其三,单位时间单位体积内以扩散方式由材料扩散至环境的水蒸气质量。

若式(5-3-6)、式(5-3-7)与式(5-3-8)中的  $w$  为负值,  $w < 0$ , 则与  $w$  相乘的水蒸气密度应为  $\rho_{v,e}$ 。

### 5.3.2.2 动量方程

多孔材料内气体向环境的渗流被假定服从达西定律,则气流速度  $w$  为

$$w = \frac{K}{\eta} \frac{p_g - p_e}{H/2} \quad (5-3-9)$$

式(5-3-9)中的  $p_e$  与  $p_g$  分别为材料外部环境与内部的气体压力。

### 5.3.2.3 能量守恒

与 4.2.2 节中介绍固气多孔材料能量守恒方程相仿,应分别建立固相、液相与气相能量守恒方程,而后,在一定假定条件下,综合成多孔材料平板整体的能量方程。这一推导过程在 4.2.2 节已有介绍,为节省篇幅,这里不再赘述,直接写出方程如下:

$$AH \frac{d\rho c t}{d\tau} + AH \dot{m}_v \gamma = hA(t_e - t) - \dot{m}_s A \gamma - w(\rho_v \gamma + \rho_g c_g t)A \quad (5-3-10)$$

若式中的  $w$  为负值,  $w < 0$ , 则与  $w$  相乘的水蒸气密度应为  $\rho_{v,e}$ , 显热焓应为  $\rho_g c_g t_e$ 。式(5-3-10)的物理含义如图 5-14 所示。

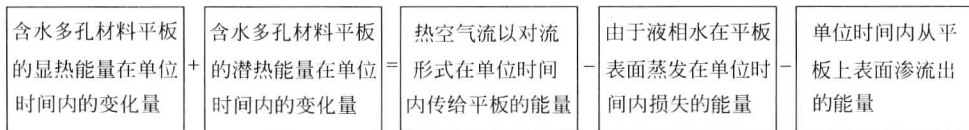


图 5-14 集总参数模型多孔材料平板能量平衡关系

式(5-3-10)中作为材料比热容  $\rho c$  可表示为

$$\rho c = (1 - \phi)\rho_s c_s + \phi S_l \rho_l c_l + \phi(1 - S_l)\rho_g c_g \quad (5-3-11)$$

式(5-3-11)中混合气体比热容  $\rho_g c_g$  可表示为

$$\rho_g c_g = \rho_a c_a + \rho_v c_v \quad (5-3-12)$$

其中  $c_a$ 、 $c_v$  与  $c_g$  分别为空气、水蒸气与两者混合气体的比热容。式(5-3-10)中  $\gamma$  为水的汽化潜热。在固-液-气共存的多孔材料中,气相的热容相对很小,常予以忽略。

应该提及,在上述能量方程中,忽略了由于气体扩散对平板材料温度的影响。这是因为,它的影响非常小<sup>[9]</sup>。

至此,我们已经建立了式(5-3-2)、式(5-3-3)、式(5-3-5)、式(5-3-8)、式(5-3-9)与式(5-3-10)共计6个控制方程,对应6个因变量,它们是  $S_l$ 、 $\dot{m}_s$ 、 $\rho_a$ 、 $\dot{m}_v$ 、 $w$  和  $t$ 。此外,这6个方程还引出水蒸气密度  $\rho_v$ 、混合气体密度  $\rho_g$  与压力  $p_g$  另外3个因变量。这样,独立方程的个数少于因变量的个数,现有的方程尚不能构成具有唯一解的封闭的方程组。从数学上讲,我们还需寻找新的控制方程以完成方程组的封闭;从物理上讲,我们还必须了解完整的物理过程,在运用守恒原则同时,还需运用热力学关系式。

#### 5.3.2.4 热力学关系式

视干空气为理想气体,则有与式(4-2-20)完全相同的如下理想气体状态方程:

$$p_a = \rho_a \frac{RT}{M_a} \quad (5-3-13)$$

其中,  $T = t + 273.15$ 。

视多孔材料内孔隙中水蒸气为当地温度所对应的饱和水蒸气。饱和水蒸气压力  $p_v$  与密度  $\rho_v$  唯一取决于温度  $t$ 。在实际计算时,由“饱和水与饱和水蒸气热力性质表”查得,这里用如下两个函数式表示

$$p_v = f_p(t) \quad (5-3-14)$$

与

$$\rho_v = f_\rho(t) \quad (5-3-15)$$

根据混合气体的压力  $p_g$  是组成混合气体各组分气体分压之和的道尔顿定律, 则有

$$p_g = p_a + p_v \quad (5-3-16)$$

混合气体密度等于空气与水蒸气密度之和, 为

$$\rho_g = \rho_a + \rho_v \quad (5-3-17)$$

上述式(5-3-13)~式(5-3-17)合计 5 个方程中, 其中又引出两个新的因变量  $p_a$  与  $p_v$ 。这样, 结合前面守恒原则中得到 9 个因变量 6 个方程, 总计为 11 个因变量 11 个独立方程, 由此得到了封闭的方程组。

组成这个方程组的 11 个方程相互耦合, 反映了 11 个因变量的内在联系, 这种耦合关系示意于图 5-15。

当材料内液相水完全被蒸发完后, 过程进入第二时期, 上述 11 个因变量中的  $S_l$ 、 $\dot{m}_s$  与  $\dot{m}_v$  均为 0, 相应地 3 个控制方程自行消失。关于  $\dot{m}_v$  控制方程(5-3-8)被关于  $\rho_v$  的式(5-3-7)所替代, 相应地, 关于  $p_v$  的式(5-3-14)与  $\rho_v$  的式(5-3-15)被式(5-3-18)所替代。

$$p_v = \rho_v \frac{RT}{M_v} \quad (5-3-18)$$

在第二时期中, 只有温度  $t$  和气体渗流速度  $w$  及气相参数中干空气、水蒸气和混合气体密度与压力  $\rho_a$ 、 $\rho_v$ 、 $\rho_g$  与  $p_a$ 、 $p_v$ 、 $p_g$  的 6 个参数, 共计 8 个因变量。这 8 个因变量之间的耦合关系示意于图 5-16。

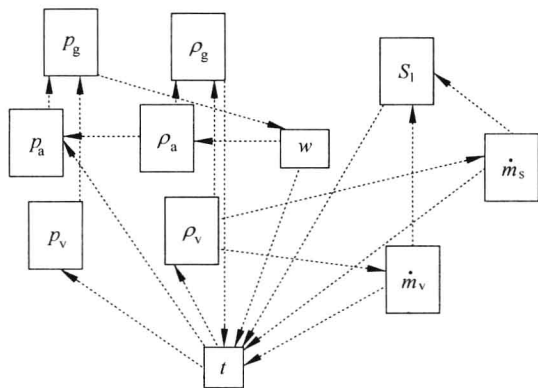


图 5-15 集总参数模型 11 个因变量的耦合关系 ( $S_l > 0$ )

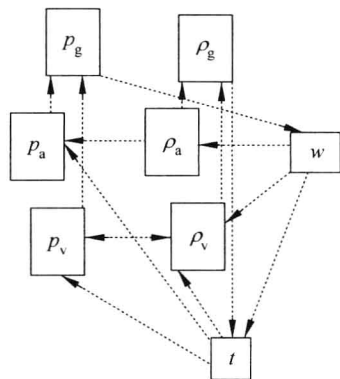


图 5-16 集总参数模型 8 个因变量的耦合关系 ( $S_l = 0$ )

### 5.3.2.5 定解条件

如前所述,定解条件包括几何条件、时间条件、边界条件及物理条件四个方面。其中几何条件在物理模型中已说明,即给定平板表面积  $A$  与厚度  $H$ 。

时间条件为给定 11 个因变量在平板加热开始时的初值,其中,  $w=0$ ,  $\dot{m}_s=0$ ,  $\dot{m}_v=0$ ,  $t=t_0$ ,  $S_1=S_{10}$ ,  $p_{v0}$  与  $\rho_{v0}$  为对应于温度  $t_0$  的饱和水蒸气压力与饱和水蒸气密度,  $p_{g0}$  为环境大气压力  $p_e$ , 取  $p_{a0}=p_e-p_{v0}$ ,  $\rho_{a0}$  根据  $t_0$  与  $p_{a0}$  按气体状态方程求得,  $\rho_{g0}=\rho_{a0}+\rho_{v0}$ 。

边界条件在集总参数模型中已包括在控制方程中,如式(5-3-3)中的  $\rho_{v,e}$ 、式(5-3-4)中的  $\rho_{a,e}$ 、式(5-3-9)中的  $p_e$  以及式(5-3-10)中的  $h$  与  $t_e$ 。它们的给定与计算将在 5.3.5 节中介绍。

物理条件是指包含在控制方程及上述定解条件中各种物质的物理性能与多孔材料结构特征。这里有式(5-3-2)中的  $\rho_l$  与  $\phi$ , 式(5-3-9)中的  $K$  与  $\eta$ , 式(5-3-10)中的  $\rho_c$ 、 $\rho_g c_g$  与  $\gamma$ 。它们的给定与计算也将在 5.3.4 节中介绍。

综上所述,整个数学模型中所有的物理量可分为三类。一是自变量时间  $\tau$ ;二是因变量,如图 5-15 所示 11 个或图 5-16 所示 8 个;三是参变量,即除自变量与因变量之外其他诸物理量。

### 5.3.3 差分方程

现将上述数学模型中 11 个因变量间的关系逐一写成差分形式的代数方程,为便于求解,都为显式差分格式。

(1) 关于液相水饱和度  $S_l$ , 将式(5-3-2)写成

$$S_l^{n+1} = S_l^n - \Delta\tau \frac{\dot{m}_s^n + \dot{m}_v^n H}{H\phi\rho_l} \quad (5-3-19)$$

(2) 关于平板表面蒸发率  $\dot{m}_s$ , 将式(5-3-3)写成

$$\dot{m}_s^{n+1} = h_m(\rho_v^n - \rho_{v,e}) \quad (5-3-20)$$

(3) 关于空气密度  $\rho_a$ , 将式(5-3-5)写成

$$\rho_a^{n+1} = \rho_a^n + \frac{\Delta\tau}{\phi(1-S_l^n)} \left( 2D_{as} \frac{\rho_{a,e} - \rho_a^n}{H^2} - \frac{w^n \rho_a^n}{H} \right) \quad (5-3-21)$$

(4) 关于材料内部体积蒸发率  $\dot{m}_v$ , 将式(5-3-8)写成

$$\dot{m}_v^{n+1} = \phi(1 - S_1^n) \frac{\rho_v^{n+1} - \rho_v^n}{\Delta\tau} + \frac{w^n \rho_v^n}{H} + \frac{2D_{as}(\rho_v^n - \rho_{v,e})}{H^2} \quad (5-3-22)$$

(5) 关于混合气体渗流速度  $w$ , 将式(5-3-9)写成

$$w^{n+1} = \frac{K}{\eta} \frac{p_g^{n+1} - p_e}{H/2} \quad (5-3-23)$$

(6) 关于温度  $t$ , 将式(5-3-10)经整理后写成

$$t^{n+1} = t^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c H} [h(t_e - t^n) - \dot{m}_s^n \gamma - H \dot{m}_v^n \gamma - w^n (\rho_v^n \gamma + \rho_g c_g t^n)] \quad (5-3-24)$$

(7) 关于空气压力  $p_a$ , 将式(5-3-13)写成

$$p_a^{n+1} = p_a^{n+1} \frac{RT^{n+1}}{M_a} \quad (5-3-25)$$

其中,  $T^{n+1} = t^{n+1} + 273.15$ 。

(8) 关于水蒸气压力  $p_v$ , 将式(5-3-14)表示成

$$p_v^{n+1} = f_p(t^{n+1}) \quad (5-3-26)$$

(9) 关于水蒸气密度  $\rho_v$ , 将式(5-3-15)表示成

$$\rho_v^{n+1} = f_\rho(t^{n+1}) \quad (5-3-27)$$

(10) 关于混合气体压力  $p_g$ , 将式(5-3-16)表示成

$$p_g^{n+1} = p_a^{n+1} + p_v^{n+1} \quad (5-3-28)$$

(11) 关于混合气体密度  $\rho_g$ , 将式(5-3-17)写成

$$\rho_g^{n+1} = \rho_a^{n+1} + \rho_v^{n+1} \quad (5-3-29)$$

平板内液相水分完全蒸发后, 过程进入第二时期, 上述式(5-3-19)~式(5-3-29)的适用性需改变。其中式(5-3-19)及式(5-3-20)消失, 式(5-3-22)改变为

$$\rho_v^{n+1} = \rho_v^n - \frac{\Delta\tau}{\phi(1 - S_1^n)} \left( 2D_{vs} \frac{\rho_v^n - \rho_{v,e}}{H^2} + \frac{w \rho_v^n}{H} \right) \quad (5-3-30)$$

式(5-3-26)与式(5-3-27)改变为

$$p_v^{n+1} = \rho_v^{n+1} \frac{RT^{n+1}}{M_v} \quad (5-3-31)$$

这样,原有 11 个因变量改变为 8 个因变量。原有式(5-3-19)~式(5-3-29)的 11 个方程改变为式(5-3-21)、式(5-3-23)~式(5-3-25)与式(5-3-28)~式(5-3-31)的 8 个方程。再次提示,上述式(5-3-21)、式(5-3-22)、式(5-3-24)及式(5-3-30)中的  $w$  若为负值,  $w < 0$ , 则与  $w$  相乘的水蒸气密度应为  $\rho_{v,e}$ , 空气密度应为  $\rho_{a,e}$ , 显热焓应为  $\rho_g c_g t_e$ 。

### 5.3.4 算例及计算结果讨论

本算例讨论视图 5-1 所示为一块潮湿砂土,上表面积  $A=1\text{ m}^2$ ,厚  $H=4\text{ cm}$ ,砂土表象密度(也称容重)  $\rho=1620\text{ kg/m}^3$ ,孔隙率  $\phi=0.4$ ,相应地固相密度  $\rho_s=2700\text{ kg/m}^3$ ,固相比热容  $c_s=1720\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ,液相水的饱和度  $S_{l0}=0.5$ ,孔隙中的气体为空气与水蒸气的混合气体,空气动力粘度  $\eta=18.6\times 10^{-6}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ (近似作为混合气体的粘度),水蒸气与空气相互质扩散率  $D_{va}=0.26\times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$ ,在本例中,  $D_{vs}=D_{as}=\phi(1-S_l)D_{va}$ ,渗透率  $K=10^{-12}\text{ m}^2$ ,砂土的初始温度  $20^\circ\text{C}$ ,在时间  $\tau\geq 0$ ,材料上表面接受热空气流对流加热,热空气流的干球温度、湿球温度与速度分别为  $t_e=50^\circ\text{C}$ ,  $t_{wet}=25^\circ\text{C}$ ,  $u_e=5\text{ m/s}$ ,相应地对流表面传热系数  $h=8.67\text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$ ,对流表面传质系数  $h_m=0.0081\text{ m/s}$ ,环境水蒸气密度  $\rho_{v,e}=0.0116\text{ kg/m}^3$  与水蒸气压力  $p_{v,e}=0.0173\times 10^5\text{ Pa}$ ,环境压力  $p_e=10^5\text{ Pa}$ ,则环境中干空气压力  $p_{a,e}=0.9827\times 10^5\text{ Pa}$ ,干空气密度  $\rho_{a,e}=1.06\text{ kg/m}^3$ ,材料内水蒸气压力  $p_v=0.0234\times 10^5\text{ Pa}$ ,干空气压力  $p_a=0.9766\times 10^5\text{ kPa}$ ,干空气密度  $\rho_a=1.161\text{ kg/m}^3$ 。取时间步长  $\Delta\tau=0.01\text{ s}$ 。

在上述已知条件下通过由式(5-3-19)~式(5-3-29)组成的差分方程组可算得 11 个因变量  $S_l^n$ 、 $\dot{m}_s^n$ 、 $\dot{m}_v^n$ 、 $p_v^n$ 、 $\rho_v^n$ 、 $p_a^n$ 、 $\rho_a^n$ 、 $p_g^n$ 、 $\rho_g^n$ 、 $w^n$  及  $t^n$  的值,  $n=1,2,\dots$ 。在  $S_{l1}=0$  之后,其中  $S_l^n$ 、 $\dot{m}_v^n$  与  $\dot{m}_s^n$  均为 0。下面结合图 5-17~图 5-19 显示本算例计算结果,并讨论上述 11 个因变量随时间的变化规律。

图 5-17 显示多孔材料平板的温度、液相水饱和度与表面液相水蒸发率随时间变化。

#### 5.3.4.1 关于温度

温度曲线可分三个阶段。第一阶段,从初始温度( $20^\circ\text{C}$ )起较迅速上升,同时,环境与材料的温度差别减小,从而使环境对材料的热流密度减小,由此使材料温度上升趋势放缓,逐渐趋近一个稳定值,这个稳定值接近环境的湿球温度( $25^\circ\text{C}$ )。第二阶段,材料温度保持不变。在这个阶段,多孔材料犹如湿球温度计的温包,单位时间内环境传输给材料的热量等于材料表面液相水蒸发所需热量。第三阶段,由

于材料内液相水已蒸发尽,材料接受的热量全部用于其自身显热的增加,也即温度的升高。与此同时,由于温度升高,环境对材料的热流密度减小,使温度逐渐趋于一个稳定值,这个稳定值为环境温度( $50^{\circ}\text{C}$ )。

### 5.3.4.2 关于液相水蒸发率

多孔材料内液相水蒸发率随时间的变化,同样也分三个阶段。第一阶段,由于材料温度迅速升高,表面饱和水蒸气密度迅速升高,进而使表面蒸发率随时间迅速上升。对多孔材料,除了表面蒸发率 $\dot{m}_s$ ,还有内部体积蒸发率 $\dot{m}_v$ ,由式(5-3-8)可知, $\dot{m}_v$ 与 $d\rho_v/d\tau$ 、 $(\rho_v - \rho_{v,e})$ 及 $w\rho_v$ 三者都呈正比。第一阶段材料升温快,使 $\rho_v$ 增长,也使 $\dot{m}_v$ 增长。第二阶段,材料温度几乎为常数,则 $\rho_v$ 与 $\dot{m}_s$ 均为常数。体积蒸发率 $\dot{m}_v$ 继续上升,其主要原因是,材料内水蒸气密度 $\rho_v$ 总是大于环境水蒸气密度 $\rho_{v,e}$ ,总有水蒸气从材料内部扩散到环境,而这种扩散能力(即质扩散率)随液相水饱和度 $S_l$ 下降而增大,导致在 $(\rho_v - \rho_{v,e})$ 保持不变条件下 $\dot{m}_v$ 继续上升。第三阶段, $\dot{m}_s$ 与 $\dot{m}_v$ 都归于零。

### 5.3.4.3 关于液相水饱和度

图5-17中关于液相水饱和度随时间的变化几乎呈一条倾斜的直线,只是初始阶段其倾斜度较小。这里必须提及,尽管上述表面蒸发率 $\dot{m}_s$ 与材料内部体积蒸发率 $\dot{m}_v$ 对液相水饱和度的下降都有贡献,而 $\dot{m}_v$ 的实际贡献远比 $\dot{m}_s$ 小得多。本例中,体积蒸发的水蒸气质量只占表面蒸发水蒸气质量不足1%。

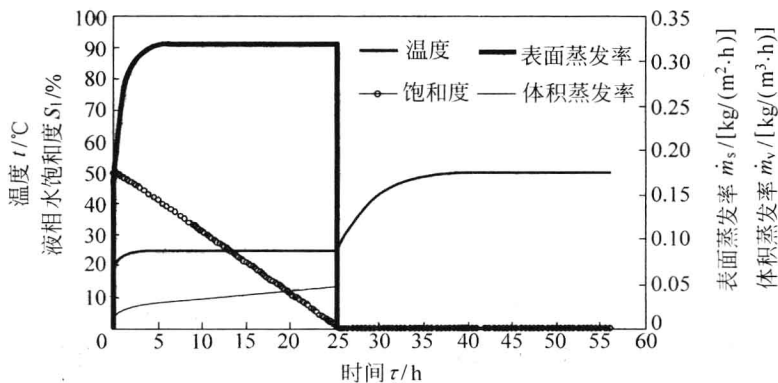


图 5-17 平板温度、液相水饱和度及水分蒸发率随时间变化



#### 5.3.4.4 关于水蒸气压力与密度

图 5-18 中两条水平线代表环境中水蒸气压力  $p_{v,e}$  与密度  $\rho_{v,e}$ 。在材料被加热前,尽管其初始温度(20℃)低于环境温度(50℃),但由于假定材料内的水蒸气处于材料初始温度对应下的饱和状态,使其压力  $p_v$  与密度  $\rho_v$  还是稍大于环境中的水蒸气压力  $p_{v,e}$  与密度  $\rho_{v,e}$ 。材料被加热后,水蒸气压力  $p_v$  与密度  $\rho_v$  随温度升高而升高。当材料加热进入第二阶段,材料温度保持不变,相应地,  $p_v$  与  $\rho_v$  也保持不变,均大于  $p_{v,e}$  与  $\rho_{v,e}$ 。在加热第三阶段,  $S_1=0$ ,相应地,  $p_v$  与  $\rho_v$  迅速地降至和  $p_{v,e}$  与  $\rho_{v,e}$  相同。

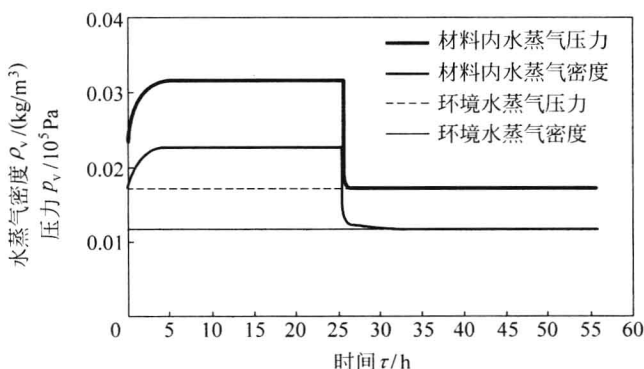


图 5-18 材料内水蒸气压力与密度随时间变化

#### 5.3.4.5 关于干空气压力、密度以及气体渗流速度

图 5-19 中两条水平线代表环境中干空气压力  $p_{a,e}$  与密度  $\rho_{a,e}$ 。在材料被加热前,材料内的气体压力与环境气体压力相同。由于材料内水蒸气压力稍高于环境,则材料内干空气的压力  $p_a$  稍低于环境中干空气压力  $p_{a,e}$ ,而材料内干空气的密度  $\rho_a$  高于环境中干空气的密度  $\rho_{a,e}$ 。当材料被加热时,由于  $\rho_a$  高于  $\rho_{a,e}$ ,形成干空气由材料内部向环境的扩散,并使  $\rho_a$  下降,相应地使  $p_a$  与  $p_g$  下降,从而造成  $p_g$  稍低于  $p_e$ ,并引起气体由环境向材料内渗流,这种渗流阻止了  $\rho_a$  继续下降。当材料加热进入第二阶段,  $\rho_a$  仍高于  $\rho_{a,e}$ ,  $p_g$  仍低于  $p_e$ ,但压力  $p_g$  与密度  $\rho_a$  都保持不变,这是由于  $\rho_a$  高于  $\rho_{a,e}$  扩散的质量正好被由于  $p_e$  稍高于  $p_g$  渗流的质量所补偿。图 5-19 中显示了渗流速度  $w$  的变化过程,从过程开始,  $w$  为负值,表明气体由环境向材料内部渗流。在加热第一阶段,材料温度上升,  $p_v$  上升,有利于提高材料内气体的压力  $p_g$ ,使  $w$  绝对值有所下降;而当加热进入第二阶段,材料温度不再上

升,  $w$  的绝对值有所上升; 当加热进入第三阶段,  $S_1=0$ ,  $p_v$  陡然下降, 造成  $w$  绝对值陡然升高,  $\rho_a$  也有一个短暂上升。但随后,  $p_a$  迅速趋近于  $p_{a,e}$ ,  $\rho_a$  也逐渐趋近于  $\rho_{a,e}$ 。在这个过程中,  $w$  绝对值逐渐变小且趋于 0。

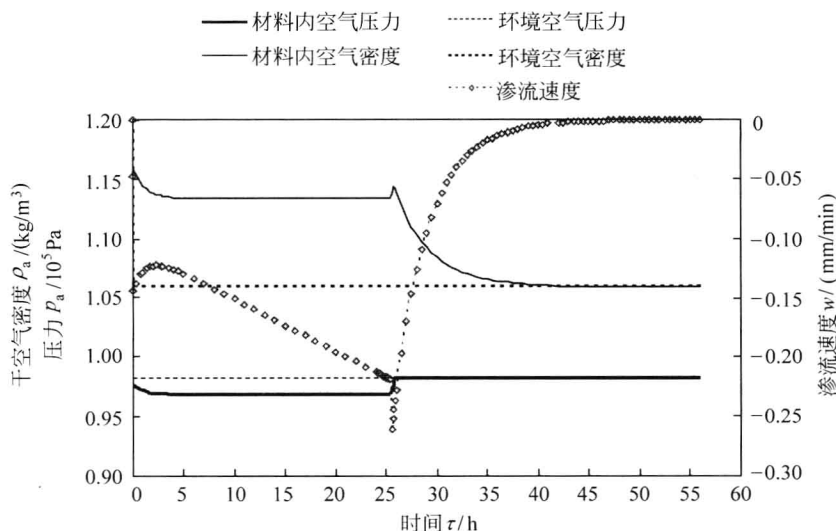


图 5-19 干空气压力、密度及渗流速度随时间变化

## 5.4 一维扩散模型及数值分析

本节仍以图 5-1 所示的问题为背景。假定多孔平板受热后其中的传热传质过程发生在沿平板厚度  $z$  方向。在这一维模型中着重分析诸物理量的分布及其随时间的变化, 也即各物理量既是时间  $\tau$  的函数, 又是空间坐标  $z$  的函数。

### 5.4.1 物理模型

一维模型是在零维模型各项假定基础上进行修改与补充。其中 5.3 节中的关于刚性固相骨架假定 1 继续有效。

在化学工程讨论各类含湿多孔材料干燥过程中, 20 世纪 20 年代, 路易斯<sup>[12]</sup>与舍伍德<sup>[13,14]</sup>率先提出了固体材料干燥模型, 其要点为: 其一, 水分从材料内部到表面以扩散形式传输; 其二, 水分的蒸发只发生在材料表面。上述两点作为本节一维模型的假定 2。为此, 本节的模型也可称为一维扩散模型<sup>[15,16]</sup>, 如图 5-20 所示, 其

中液相水是连通的,可以通过扩散使液相水由高饱和度处向低饱和度处传输。

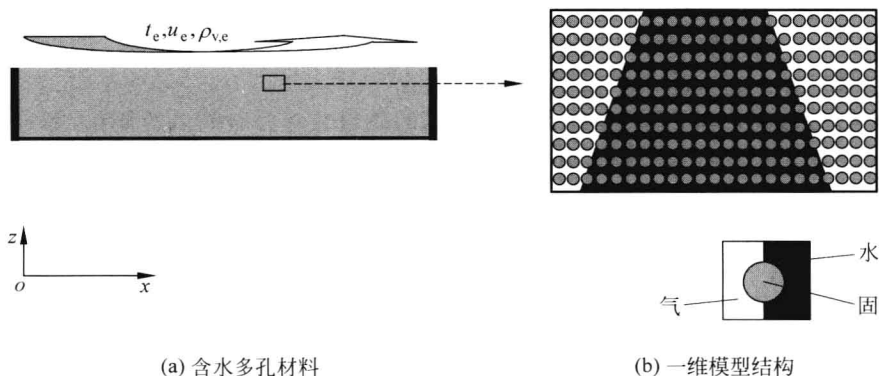


图 5-20 含水多孔材料一维扩散模型

假定 3, 根据 5.1.3 节中提及的关于液相水束缚饱和度<sup>[6,17]</sup>这一概念, 认为材料表面处液相水饱和度  $S_l$  存在一个临界点  $S_{l,c}$ 。当  $S_l > S_{l,c}$ , 自由水能自由地传输到表面, 并能使整个表面被润湿, 即蒸发面积为平板表面积  $A$ ; 而当  $S_l < S_{l,c}$ , 传输到平板表面的自由水难以润湿整个表面, 且润湿的面积随  $S_l$  减小而减小<sup>[18]</sup>。

假定 4, 本节模型中, 忽略材料内部液相水的蒸发以及气体(空气与水蒸气)的流动与质量扩散过程。

在上述诸假定条件下, 图 5-15 中所示的 11 个因变量中有 8 个因变量可省略, 只剩下液相水的饱和度  $S_l$ 、温度  $t$  及表面蒸发率  $\dot{m}_s$ , 3 个因变量, 它们三者相互耦合, 如图 5-21 所示。

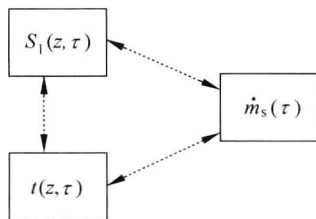


图 5-21 一维扩散模型 3 个因变量耦合关系

## 5.4.2 数学模型

按图 5-21 所示, 写出液相水饱和度  $S_l$ 、材料温度  $t$  及表面蒸发率  $\dot{m}_s$  3 个因变量的控制方程及相应定解条件。

### 5.4.2.1 控制方程

#### 1. 液相水质量守恒

多孔材料中液相的水在材料接受加热过程中由于表面液相水的蒸发而引起其

内部液相水饱和度各处不均匀,从而引起液相水质量的扩散,对照式(5-2-20)可表示为

$$\phi \rho_l \frac{\partial S_l}{\partial \tau} = D_{ls} \phi \rho_l \frac{\partial^2 S_l}{\partial z^2} \quad (5-4-1)$$

式中,等号左边表示多孔材料中单位体积水的质量在单位时间内的变化,等号右边表示单位时间内水以扩散的方式通过多孔材料单位体积的边界传入的质量。式(5-4-1)表明,多孔材料单位体积水的质量的变化是由于其邻近水扩散的结果。式(5-4-1)经整理可写为

$$\frac{\partial S_l}{\partial \tau} = D_{ls} \frac{\partial^2 S_l}{\partial z^2} \quad (5-4-2)$$

式(5-4-2)与热传导方程式(2-2-28)完全相似,相应地, $D_{ls}$ 为液相水在固体介质中的质扩散率,它与热扩散率有相同的量纲。式(5-4-1)或式(5-4-2)为  $S_l$  的控制方程。

## 2. 能量守恒

首先,应分别建立固相、液相与气相各自的能量守恒方程。

固相能量守恒方程与式(4-2-11)相仿,可得

$$\begin{aligned} (1-\phi) \rho_s c_s \frac{\partial t_s}{\partial \tau} = & (1-\phi) \lambda_s \frac{\partial^2 t_s}{\partial z^2} + h_{sl} A_{sl} (t_l - t_s) \\ & + h_{sg} A_{sg} (t_g - t_s) \end{aligned} \quad (5-4-3)$$

此式的物理含义可对照式(4-2-11)进行理解。

液相水能量守恒方程必须顾及液相水扩散流的存在,对照式(4-2-12)表示为

$$\begin{aligned} \phi \rho_l c_l \frac{\partial S_l t_l}{\partial \tau} = & \phi S_l \lambda_l \frac{\partial^2 t_l}{\partial z^2} - \phi S_l \rho_l c_l w \frac{\partial t_l}{\partial z} \\ & + h_{sl} A_{sl} (t_s - t_l) + h_{lg} A_{lg} (t_g - t_l) \end{aligned} \quad (5-4-4)$$

式中表示在对流项中的质量流密度  $\phi S_l \rho_l w$ ,根据 5.2 节的分析,把对流项中的质量的渗流等效成质量的扩散,按费克定律表示为

$$\phi S_l \rho_l w = -D_{ls} \frac{\partial \phi S_l \rho_l}{\partial z} \quad (5-4-5)$$

这样,上述方程(5-4-4)中的对流项改写成

$$\phi S_l \rho_l c_l w \frac{\partial t_l}{\partial z} = -D_{ls} \phi \rho_l c_l \frac{\partial S_l}{\partial z} \frac{\partial t_l}{\partial z} \quad (5-4-6)$$

将式(5-4-6)代入上述液相水能量方程(5-4-4),使之成为

$$\phi \rho_l c_l \frac{\partial S_l t_l}{\partial \tau} = \phi S_l \lambda_l \frac{\partial^2 t_l}{\partial z^2} + D_{ls} \phi \rho_l c_l \frac{\partial S_l}{\partial z} \frac{\partial t_l}{\partial z} + h_{sl} A_{sl} (t_s - t_l) + h_{lg} A_{lg} (t_g - t_l) \quad (5-4-7)$$

式(5-4-7)的物理含义可解释为如图 5-22 所示。

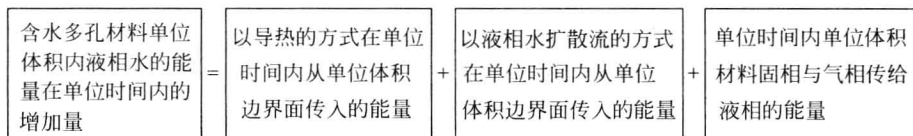


图 5-22 一维扩散模型多孔材料平板能量平衡关系

气相能量守恒方程与式(4-2-12)相仿,忽略气相物质流动时对温度的影响,可写为

$$\phi \rho_g c_g \frac{\partial (1 - S_l) t_g}{\partial \tau} = \phi (1 - S_l) \lambda_g \frac{\partial^2 t_g}{\partial z^2} + h_{sg} A_{sg} (t_s - t_g) + h_{lg} A_{lg} (t_l - t_g) \quad (5-4-8)$$

其物理含义可对照式(4-2-12)进行理解。

对照式(4-2-13)、式(4-2-14)及式(4-2-15),可得<sup>[19]</sup>

$$t_s = t_l = t_g = t \quad (5-4-9)$$

$$\lambda = (1 - \phi) \lambda_s + \phi S_l \lambda_l + \phi (1 - S_l) \lambda_g \quad (5-4-10)$$

$$\rho c = (1 - \phi) \rho_s c_s + \phi S_l \rho_l c_l + \phi (1 - S_l) \rho_g c_g \quad (5-4-11)$$

且

$$\rho_g c_g = \rho_a c_a + \rho_v c_v \quad (5-4-12)$$

将式(5-4-3)、式(5-4-7)与式(5-4-8)相加,可得

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + D_{ls} \phi \rho_l c_l \frac{\partial S_l}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} \quad (5-4-13)$$

上式的物理含义是,单位体积的含水多孔材料在单位时间内能量的增加(等号左边)等于单位时间内以导热方式通过体积边界导入体积的能量(等号右边第一项)与以液相水质量扩散流方式通过体积边界传入体积的能量之和(等号右边第二项)。式(5-4-13)为温度  $t$  的控制方程。

### 3. 表面蒸发率

表面蒸发率应该在上述方程(5-4-1)的边界条件中出现,可表示为

$$-D_{ls}\phi\rho_l \frac{\partial S_l}{\partial z} = \dot{m}_s \quad (5-4-14)$$

式(5-4-14)的含义是,单位时间内以扩散形式由材料内部传到材料单位表面积的液相水的质量等于单位时间单位面积上液相水转变成水蒸气的质量。

当材料表面  $S_l \geq S_{l,c}$  时,液相水完全润湿材料表面,则多孔材料表面处水的蒸发犹如平静的自由水表面的蒸发,即式(5-4-14)中的  $\dot{m}_s$  为

$$\dot{m}_s = h_m(\rho_v - \rho_{v,e}) \quad (5-4-15)$$

式中,  $\rho_v$  为表面温度对应的饱和水蒸气密度;  $\rho_{v,e}$  为环境中的水蒸气密度。

而当材料表面  $S_l < S_{l,c}$  时,液相水不能完全润湿材料表面,且认为其润湿的面积与材料表面积之比等于水的饱和度与临界水饱和度之比,即式(5-4-14)中的  $\dot{m}_s$  为

$$\dot{m}_s = h_m(\rho_v - \rho_{v,e})S_l/S_{l,c} \quad (5-4-16)$$

式(5-4-15)与式(5-4-16)所示的  $\dot{m}_s$  在本节模型中作为独立因变量,则式(5-4-15)与式(5-4-16)就是  $\dot{m}_s$  的控制方程。

#### 5.4.2.2 定解条件

##### 1. 几何条件

给出多孔材料平板表面积  $A$  与厚度  $H$ 。

##### 2. 初始条件

对应控制方程,给出液相水饱和度  $S_l$ 、材料温度  $t$  与材料表面蒸发率  $\dot{m}_s$  的初始值,即,  $S_l = S_{l0}$ ,  $t = t_0$  及  $\dot{m}_s = h_m(\rho_{v0} - \rho_{v,e})$ , 其中  $\rho_{v0}$  为温度  $t_0$  对应的饱和水蒸气密度。

##### 3. 边界条件

(1) 对应液相水饱和度  $S_l$  微分方程(5-4-1)的边界条件为在  $z=0$  处,

$$\frac{\partial S_l}{\partial z} = 0 \quad (5-4-17)$$

式(5-4-17)表示,在材料底部  $z=0$  处没有水的泄漏与补充。

在  $z=H$  处,边界条件如式(5-4-14)所示。

(2) 对应温度  $t$  微分方程(5-4-13)的边界条件为在  $z=0$  处,

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (5-4-18)$$

式(5-4-18)表示,在材料底部  $z=0$  处是绝热的。

在  $z=H$  处,

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = h(t_e - t) - \dot{m}_s \gamma \quad (5-4-19)$$

式(5-4-19)等号左边为材料表面处单位时间内在单位表面积以导热方式传向材料内部的热量。等号右边第一项为空气流在单位时间内以对流方式传给单位表面积的热量;第二项为单位时间内单位表面积上由于液相水蒸发所消耗的热量。式(5-4-19)表明,环境空气流单位时间内给予单位表面积的热量扣除由于蒸发所消耗的热量等于导向材料内部的热量。

#### 4. 物理条件

物理条件是指包含在上述控制方程与定解条件中各项涉及固相、液相及气相物质的热物理性质以及相关参数。对含水多孔材料而言,其中不少热物理性质难以确定,即便对某种含水多孔材料在特定条件下给出实验数据,也难以推广到一般情形。加之,在建立数学模型过程中,也必须对物性参数作模型化处理,例如式(5-4-10)就是对多孔材料的等效导热系数  $\lambda$  表示为固-液-气相互并联的结构。对其他物性量,如固、液相物质的密度,固、液、气相物质的比热容,水的扩散率等均假定为常数。

### 5.4.3 差分方程

现将上述控制方程及相应定解条件写成差分方程。在建立差分方程前,先将求解区域离散化。为此,将求解域  $0 \leq z \leq H$  离散成从  $j=1$  到  $j=JZ$  共  $JZ$  个单元。其中  $j=2, 3, \dots, JZ-1$  对应于内部单元,  $j=1$  与  $j=JZ$  对应于边界单元,每个单元对应的节点在单元中心,如图 4-53 所示。

通过划分单元或节点,而后将微分方程转化成差分方程,是获得差分方程的一种方法。另一种方法是,视这些单元为控制容积<sup>[20]</sup>或表征元容积<sup>[21]</sup>,而后对每个单元(容积)按质量与能量守恒原则进行推导获得。也可以混合应用上述两种方法。

#### 5.4.3.1 液相水饱和度

液相水饱和度  $S_l$  控制方程(5-4-2)相应地内部单元的差分方程可由控制容积法获得,

$$\frac{S_{l,j}^{n+1} - S_{l,j}^n}{\Delta\tau} \Delta z = D_{ls,j-1,j} \frac{S_{l,j-1}^n - S_{l,j}^n}{\Delta z} + D_{ls,j+1,j} \frac{S_{l,j+1}^n - S_{l,j}^n}{\Delta z}$$

上式经整理后

$$\begin{aligned} S_{l,j}^{n+1} = & S_{l,j}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} [D_{ls,j-1,j} (S_{l,j-1}^n - S_{l,j}^n) \\ & + D_{ls,j+1,j} (S_{l,j+1}^n - S_{l,j}^n)] \end{aligned} \quad (5-4-20)$$

将边界条件式(5-4-17)用控制容积法写成单元  $j=1$  的差分方程,即为

$$S_{l,j}^{n+1} = S_{l,j}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} D_{ls,j+1,j} (S_{l,j+1}^n - S_{l,j}^n) \quad (5-4-21)$$

将边界条件式(5-4-14)用控制容积法写成单元  $j=JZ$  的差分方程,即为

$$S_{l,j}^{n+1} = S_{l,j}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} D_{ls,j-1,j} (S_{l,j-1}^n - S_{l,j}^n) - \dot{m}_s^n \frac{\Delta\tau}{\rho_l \phi \Delta z} \quad (5-4-22)$$

式中  $\dot{m}_s^n$  由后面即将介绍的式(5-4-30)与式(5-4-31)求得。上述各式中,

$$D_{ls,j-1,j} = \frac{2}{\frac{1}{D_{ls,j-1}} + \frac{1}{D_{ls,j}}} \quad (5-4-23)$$

及

$$D_{ls,j+1,j} = \frac{2}{\frac{1}{D_{ls,j}} + \frac{1}{D_{ls,j+1}}} \quad (5-4-24)$$

### 5.4.3.2 温度

温度  $t$  控制方程式(5-4-13)相应地内部单元的差分方程可由控制容积法获得,经整理后为

$$\begin{aligned} t_j^{n+1} = & t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j} (t_{j-1}^n - t_j^n) + \lambda_{j+1,j} (t_{j+1}^n - t_j^n) \\ & + D_{ls,j-1,j} \phi \rho_l c_l (S_{l,j-1}^n - S_{l,j}^n) t_{j-1}^n \\ & - D_{ls,j+1,j} \phi \rho_l c_l (S_{l,j}^n - S_{l,j+1}^n) t_j^n] \end{aligned} \quad (5-4-25)$$

式(5-4-25)中,



$$\lambda_{j-1,j} = \frac{2}{\frac{1}{\lambda_{j-1}} + \frac{1}{\lambda_j}} \quad (5-4-26)$$

及

$$\lambda_{j+1,j} = \frac{2}{\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_{j+1}}} \quad (5-4-27)$$

式(5-4-26)与式(5-4-27)是调和平均<sup>[22]</sup>,这是处理变导热系数微分方程常用的一种方法。

将边界条件式(5-4-18)用控制容积法写成单元  $j=1$  的差分方程,即为

$$t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j+1,j} (t_{j+1}^n - t_j^n) - D_{ls,j+1,j} \phi \rho_l c_l (S_{l,j}^n - S_{l,j+1}^n) t_j^n] \quad (5-4-28)$$

将边界条件式(5-4-19)用控制容积法写成单元  $j=JZ$  的差分方程,即为

$$t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j} (t_{j-1}^n - t_j^n) + D_{ls,j-1,j} \phi \rho_l c_l (S_{l,j-1}^n - S_{l,j}^n) t_{j-1}^n + h(t_e - t_j^n) \Delta z - \dot{m}_s \gamma \Delta z] \quad (5-4-29)$$

为提高计算的准确性,有关绝热边界条件还有更多的处理方法<sup>[22,23]</sup>。

### 5.4.3.3 表面蒸发率

将式(5-4-15)与式(5-4-16)写成

$$\dot{m}_s^{n+1} = h_m (\rho_v^n - \rho_{v,e}) \quad (5-4-30)$$

与

$$\dot{m}_s^{n+1} = h_m (\rho_v^n - \rho_{v,e}) S_l^n / S_{l,c} \quad (5-4-31)$$

### 5.4.4 算例及计算结果讨论

本算例的已知条件中与 5.3.4 节算例相同的部分不再重复。不同的是,本例中引入了一些新的参数。它们是,液相水临界饱和度  $S_{l,c}$ ,取  $S_{l,c}=0.1$ ;水在多孔材料中质扩散率  $D_{ls}$ ,由于  $D_{ls}$  强烈依赖于  $S_l$ ,参阅文献[10]及表 6-3,取  $D_{ls}=10^{-8}+10^{-7} S_l$  ( $m^2/s$ ),固相骨架(砂土)导热系数  $\lambda_s=1.44 \text{ W}/(m \cdot K)$ ,水的导热

系数  $\lambda_l = 0.616 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 气体导热系数  $\lambda_g = 0.026 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

在上述已知条件下通过求解由式(5-4-20)~式(5-4-31)组成的差分方程组可得到 3 个因变量  $S_l^n$ 、 $\dot{m}_s^n$  及  $t^n$ ,  $n=1, 2, \dots$ 。下面结合图 5-23~图 5-25 显示本算例结果并进行讨论。

图 5-23 显示多孔材料平板的温度与材料表面液相水蒸发率随时间变化。由图 5-23 曲线可见, 整个加热过程可分成三个阶段。第一阶段, 开始时, 平板温度迅速上升, 表面蒸发率也迅速上升, 相应地, 环境对材料表面的热流密度由于它们之间温度差别减小而迅速下降。热流密度的下降又促使材料表面温度与蒸发率上升趋势放慢, 这样, 温度、热流密度与蒸发率各自都趋于各自的某一稳定值。对温度而言, 接近湿球温度( $25^\circ\text{C}$ ), 且低于湿球温度( $23.6^\circ\text{C}$ )。第二阶段, 多孔材料维持在接近湿球温度, 相应地, 表面蒸发率也维持在某一稳定值。在这个阶段, 环境传输给材料的热量一部分消耗在材料表面液相水蒸发所需的热量, 另一部分由材料表面传向材料内部, 且由表面传向底部的热传导热流密度与液相水由底部向表面传输的热对流热流密度相等。当表面的液相水饱和度  $S_{l,jz}$  降至  $S_{l,c}$ , 第二阶段结束。第三阶段, 由于材料表面有效蒸发面积减小,  $\dot{m}_s$  开始逐渐下降而趋于 0, 平板温度从低于湿球温度迅速上升渐渐趋于环境温度( $50^\circ\text{C}$ )。

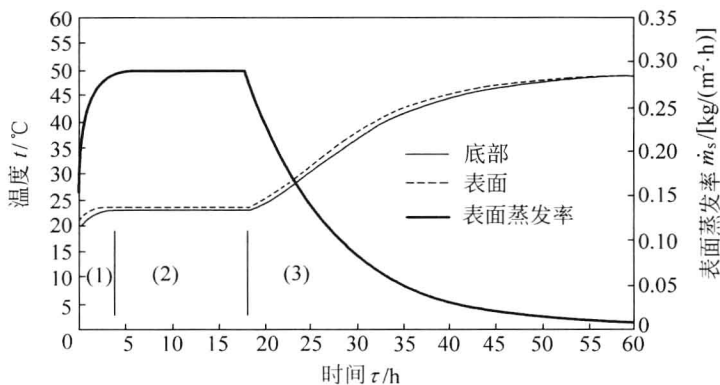


图 5-23 平板温度分布及表面蒸发率随时间变化

图 5-24 给出的是平板底部、表面以及平板平均液相水饱和度的变化曲线。由图可见, 底部与表面的  $S_l$  有较大的差别。在平板整个加热过程中, 这种差别也经历三个阶段。由差别从 0 逐渐加大的第一阶段, 到差别基本保持不变的第二阶段, 再到差别逐渐缩小的第三阶段。

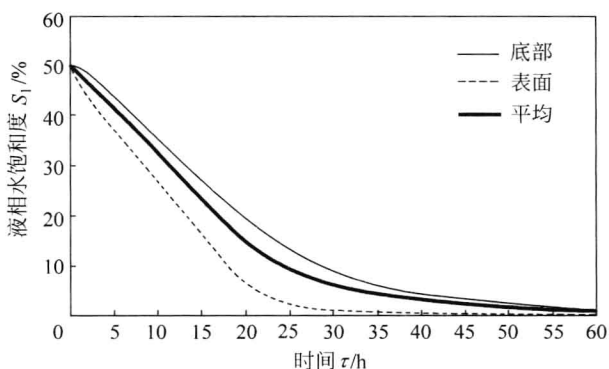


图 5-24 材料内液相水饱和度分布随时间变化

图 5-25 显示了在平板加热三个阶段材料内温度分布与液相水饱和度分布的变化。就温度分布而言(用离散点表示),三个阶段中几乎是一条水平线向上平移,只是表面温度略高于底部。而对液相水饱和度  $S_l$  而言(用光滑曲线表示),在第一阶段,即平板温度初始上升阶段,  $S_l$  的分布由一条水平线而变成一条弯曲的抛物线。在第二阶段,即当平板温度保持不变的阶段,  $S_l$  似乎是一簇平行的抛物线,自上向下平移,由于水的质扩散率  $D_{ls}$  随饱和度  $S_l$  下降而下降,抛物线的弯曲程度随  $S_l$  下降而变大。当加热进入第三阶段,材料温度上升时,饱和度分布的抛物线又呈平坦。

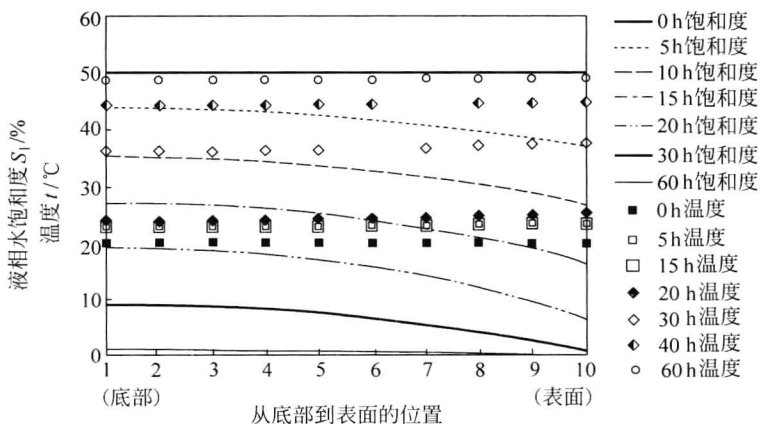


图 5-25 不同时刻温度与液相水饱和度的分布

## 5.5 一维扩散-蒸发模型及数值分析

本节继续介绍一维模型,与 5.4 节的差别反映在物理模型上。

### 5.5.1 物理模型

假定 1, 5.3 节与 5.4 节中假定 1 继续有效,即刚性固相骨架。

假定 2, 根据毛细管多孔材料存在束缚饱和度这一事实,它限制了液相水的扩散能力。也即,当液相水饱和度降到束缚饱和度,液相水丧失扩散能力,只能就地蒸发,且蒸发率正比于液相水饱和度。

当材料表面被加热,表面液相水被蒸发,多孔材料内液相的自由水以扩散(渗流)形式传输到被加热的表面( $z=H$ ),以补偿表面上液相水蒸发。当表面的液相水饱和度  $S_l$  降至  $S_{l,c}$  后,整个材料分成  $S_l \geq S_{l,c}$  与  $S_l < S_{l,c}$  的上、下两个区域,如图 5-26 所示。

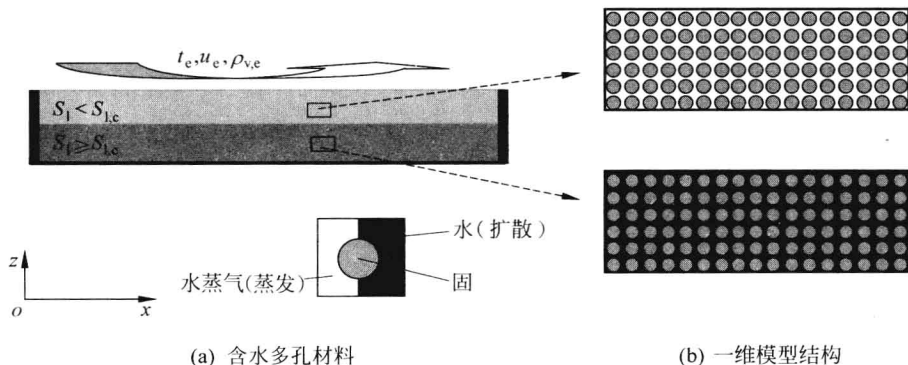


图 5-26 含水多孔材料一维扩散-蒸发模型示意图

$S_l < S_{l,c}$  的区域为干区,  $S_l \geq S_{l,c}$  的区域为湿区。上、下两区的分界面是自材料表面  $S_l$  降至  $S_{l,c}$  时形成,并从表面开始向后退,直至材料底部,也即干区厚度  $\delta$  由 0 增至  $H$ ,如图 5-27 所示。

这个分界面由表面向内部移动过程实质上是相变界面移动问题<sup>[24,25]</sup>,此移动的界面常被称为后退蒸发前沿<sup>[26]</sup>(receding evaporation front)。材料内部界面上存在的蒸发称为界面蒸发,蒸发率记作  $\dot{m}_i$ ,以区别表面蒸发率  $\dot{m}_s$ 。材料内部存在蒸发是本节与 5.4 节模型最基本的区别,本节模型称为扩散-蒸发模型。

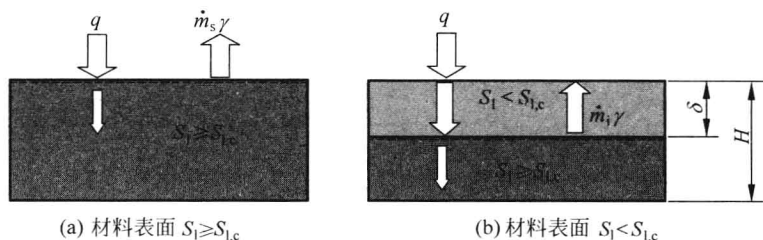


图 5-27 分界面移动示意图

假定 3, 在  $S_l < S_{l,c}$  的干区, 处在束缚饱和度以下的液相水只能蒸发成水蒸气, 且水蒸气以扩散的形式由高密度处传输到低密度处, 也即由移动界面处传输到材料表面, 最终至环境。区域内各处的水蒸气密度由该处的水蒸气扩散与液相水蒸发两个过程决定。

假定 4, 在  $S_l \geq S_{l,c}$  的湿区, 水蒸气与液相水处于相平衡, 水蒸气的密度与压力只取决于当地温度, 为当地温度下的饱和水蒸气密度与饱和水蒸气压力。忽略该区域内液相水的蒸发与水蒸气的迁移。

假定 5, 整个材料内忽略空气的存在, 不计空气的质扩散。

在上述诸假定条件下, 图 5-15 中所示的 11 个因变量中有 5 个因变量可省略, 它们是空气与混合气体的压力与密度  $p_a$ 、 $p_g$ 、 $\rho_a$ 、 $\rho_g$  以及气体渗流速度  $w$ , 剩下的是液相水饱和度  $S_l$ 、温度  $t$ 、表面蒸发率  $\dot{m}_s$  与内部体积蒸发率  $\dot{m}_v$  以及水蒸气密度  $\rho_v$  与压力  $p_v$  共 6 个因变量。此外, 尚需添加两个因变量, 即移动界面的位置  $\delta$  (干区的厚度) 及界面上蒸发率  $\dot{m}_i$ 。诸因变量间的耦合关系与材料所经历的过程密切相关。就液相水饱和度  $S_l$  变化的整个过程而言, 可分为三个阶段。第一阶段, 图 5-26 所示的整个平板材料  $S_l \geq S_{l,c}$ ; 第二阶段, 平板内部分成  $S_l \geq S_{l,c}$  与  $S_l < S_{l,c}$  两个区域; 第三阶段, 整个平板  $S_l < S_{l,c}$ 。在不同的三个阶段, 上述 6 个因变量以及  $\delta$  与  $\dot{m}_i$  之间的耦合关系不同 (参见图 5-28)。

在整个物理模型中还有更多的假定, 它们将在以下数学模型、差分方程及算例中作出说明。

## 5.5.2 数学模型

### 5.5.2.1 液相水质量守恒方程

在  $S_l \geq S_{l,c}$  区域, 与式 (5-4-1) 相同, 经整理可写为

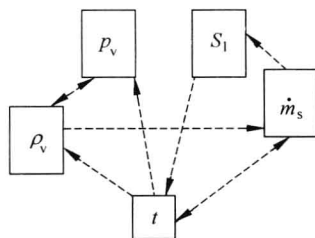
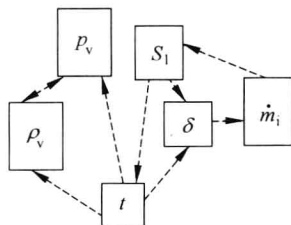
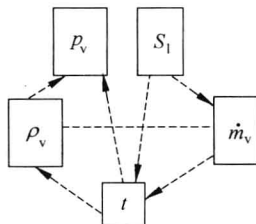
(a) 整个材料  $S_l \geq S_{l,c}$  条件下5个因变量耦合关系(b)  $S_l \geq S_{l,c}$  湿区内6个因变量耦合关系(c)  $S_l < S_{l,c}$  干区内5个因变量耦合关系

图 5-28 一维扩散-蒸发模型因变量间的耦合关系

$$\frac{\partial S_l}{\partial \tau} = D_{ls} \frac{\partial^2 S_l}{\partial z^2} \quad (5-5-1)$$

在  $S_l < S_{l,c}$  区域, 根据物理模型中假定 2, 可写为

$$-\frac{dS_l}{d\tau} = CS_l \quad (5-5-2)$$

式(5-5-1)与式(5-5-2)是液相水饱和度  $S_l$  在  $S_l \geq S_{l,c}$  与  $S_l < S_{l,c}$  两个区域内的控制方程。式(5-5-1)的含义在 5.4 节中已有解释。式(5-5-2)表示当地  $S_l$  的下降速率正比于  $S_l$  本身, 它应被理解为, 当地液相水的蒸发率正比于液相水饱和度。在  $S_l < S_{l,c}$  区域内, 讨论  $S_l(z, \tau)$  随时间  $\tau$  变化时, 其中空间坐标  $z$  已不再是自变量而变成参变量, 于是, 关于  $S_l$  的变化可用常微分方程(5-5-2)表示, 且方程中系数为常数  $C$ , 应由实验确定。常微分方程式(5-5-2)的一般解为

$$S_l = S_{l,c} e^{-C\tau} \quad (5-5-3)$$

### 5.5.2.2 气相质量守恒方程

气相质量守恒方程只对  $S_l < S_{l,c}$  区域内水蒸气成立, 可表示为

$$\phi \frac{\partial \rho_v}{\partial \tau} = D_{vs} \frac{\partial^2 \rho_v}{\partial z^2} + \dot{m}_v \quad (5-5-4)$$

式(5-5-4)的含义是,多孔材料干区域内单位时间单位体积内水蒸气质量的增加等于单位时间内通过扩散到达该单位体积的水蒸气的质量与单位时间单位体积内由液相水蒸发所产生的水蒸气质量之和。式(5-5-4)是水蒸气密度  $\rho_v$  的控制方程。

### 5.5.2.3 能量守恒方程

能量守恒方程在  $S_l \geq S_{l,c}$  干区域与  $S_l < S_{l,c}$  湿区域是不同的。

在  $S_l \geq S_{l,c}$  区域,按照式(5-4-13),能量守恒方程为

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + D_{ls} \phi \rho_{l,c} \frac{\partial S_l}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} \quad (5-5-5)$$

在  $S_l < S_{l,c}$  区域,能量守恒方程则为

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) - \dot{m}_v \quad (5-5-6)$$

式(5-5-5)与式(5-5-6)是温度  $t$  在  $S_l \geq S_{l,c}$  与  $S_l < S_{l,c}$  两个区域内的控制方程,干、湿两区移动界面上能量守恒方程见式(5-5-22)。

### 5.5.2.4 热力学关系式

在  $S_l \geq S_{l,c}$  区域,液相水与水蒸气处于相平衡,由温度可得相应地饱和水蒸气密度  $\rho_v$  与饱和水蒸气压力  $p_v$ ,表示为

$$\rho_v = f_p(t) \quad (5-5-7)$$

与

$$p_v = f_p(t) \quad (5-5-8)$$

在  $S_l < S_{l,c}$  区域内,水蒸气压力由如下理想气体状态方程决定

$$p_v = \rho_v \frac{RT}{M_v} \quad (5-5-9)$$

上述式(5-5-7)、式(5-5-8)和式(5-5-9)是水蒸气密度  $\rho_v$  及压力  $p_v$  的控制方程。对照式(5-5-7)、式(5-5-8)与式(5-5-9)、式(5-5-4)可发现,在  $S_l \geq S_{l,c}$  与  $S_l < S_{l,c}$  两个不同区域,寻求水蒸气密度  $\rho_v$  及水蒸气压力  $p_v$  的途径是不同的。

### 5.5.2.5 表面蒸发率与界面蒸发率

在材料表面处  $S_l \geq S_{l,c}$  条件下, 表面蒸发率  $\dot{m}_s$  出现在方程(5-5-1)的边界条件中, 即

$$-D_{ls}\phi\rho_l \frac{\partial S_l}{\partial z} = \dot{m}_s \quad (5-5-10)$$

式中  $\dot{m}_s$  与式(5-4-15)相同, 为

$$\dot{m}_s = h_m(\rho_v - \rho_{v,e}) \quad (5-5-11)$$

式中,  $\rho_v$  为表面处水蒸气密度, 也是表面温度对应的饱和水蒸气密度;  $\rho_{v,e}$  为环境中的水蒸气密度。式(5-5-11)是表面蒸发率  $\dot{m}_s$  的控制方程。

当材料表面处  $S_l < S_{l,c}$ , 且  $S_l = S_{l,c}$  的移动界面后退至材料内部, 界面处质量守恒表示为

$$-D_{ls}\phi\rho_l \frac{\partial (S_l - S_{l,c})}{\partial z} = \dot{m}_i \quad (5-5-12)$$

式(5-5-12)的含义是, 从  $S_l \geq S_{l,c}$  区域扩散至界面的超过临界饱和度的液相水质量流密度(单位时间内流过单位面积的质量)等于界面上蒸发率(单位时间内在单位面积上蒸发的质量)。

界面处质量守恒还可表示为

$$\phi\rho_l (S_l - S_{l,c}) \frac{d\delta}{d\tau} = \dot{m}_i \quad (5-5-13)$$

式(5-5-13)的含义是, 界面上的蒸发率  $\dot{m}_i$  是单位时间界面后退空间内所包含的超过临界饱和度的液相水的质量,  $\delta$  是干区的厚度。式(5-5-13)是干区厚度  $\delta$  的控制方程。

式(5-5-12)中的  $\dot{m}_i$  不同于式(5-5-11)所示的  $\dot{m}_s$ 。式(5-5-11)表示材料表面的水蒸气以对流传质形式传输到环境中, 而界面上的水蒸气只有通过在材料内部的质量扩散至表面而后传输给环境。为此, 对应于式(5-5-11), 将  $\dot{m}_i$  表示为

$$\dot{m}_i = \frac{D_{vs}}{\delta}(\rho_v - \rho_{v,e}) \quad (5-5-14)$$

式中,  $D_{vs}$  为水蒸气在干区内的质扩散率;  $\rho_v$  为界面处水蒸气密度, 也是界面温度对应的饱和水蒸气密度。当  $\delta$  很小时, 若  $\dot{m}_i$  大于  $\dot{m}_s$ , 此条件下, 用  $\dot{m}_s$  替代  $\dot{m}_i$ 。随  $\delta$  增加,  $\dot{m}_i$  逐渐变小。式(5-5-14)是界面蒸发率  $\dot{m}_i$  的控制方程。



### 5.5.2.6 体积蒸发率

材料内部的液相水蒸发只发生在  $S_l < S_{l,c}$  的干区,表示为

$$\dot{m}_v = -\rho_l \phi \frac{dS_l}{d\tau} \quad (5-5-15)$$

式(5-5-15)的含义是,在  $S_l < S_{l,c}$  的干区内单位时间单位体积内产生的水蒸气质量  $\dot{m}_v$  等于单位时间单位体积内液相水减少的质量。式(5-5-15)是体积蒸发率  $\dot{m}_v$  的控制方程。

综上所述,当材料表面  $S_l \geq S_{l,c}$  条件下,控制方程为式(5-5-1)、式(5-5-5)、式(5-5-7)、式(5-5-8)及式(5-5-11)共5个方程,对应5个因变量  $S_l$ 、 $t$ 、 $\rho_v$ 、 $p_v$  与  $\dot{m}_s$ 。而当材料被分成  $S_l \geq S_{l,c}$  湿区与  $S_l < S_{l,c}$  干区两个区域后,在  $S_l \geq S_{l,c}$  湿区内,控制方程为式(5-5-1)、式(5-5-5)、式(5-5-7)、式(5-5-8)、式(5-5-14)和式(5-5-13)共6个方程,对应6个因变量  $S_l$ 、 $t$ 、 $\rho_v$ 、 $p_v$ 、 $\dot{m}_i$  与  $\delta$ 。在  $S_l < S_{l,c}$  区域内,控制方程为式(5-5-2)、式(5-5-4)、式(5-5-6)、式(5-5-9)和式(5-5-15)共5个方程,对应5个因变量  $S_l$ 、 $\rho_v$ 、 $t$ 、 $p_v$  与  $\dot{m}_v$ 。上述三种情形因变量间的耦合关系分别表示在图5-28(a)、(b)与(c)中。

### 5.5.2.7 定解条件

#### 1. 几何条件

给出平板多孔材料表面积  $A$  与厚度  $H$ 。在一维模型中  $A=1$ 。由于蒸发面是一个移动界面,问题求解的两个几何区域随时间变化。

#### 2. 初始条件

对应控制方程式(5-5-1)、式(5-5-5)、式(5-5-7)、式(5-5-8)与式(5-5-11),给出液相水饱和度  $S_l$ 、温度  $t$ 、水蒸气密度  $\rho_v$  与压力  $p_v$  以及表面蒸发率  $\dot{m}_s$  的初始值,即,  $S_l = S_{l0}$ ,  $t = t_0$ ,  $\rho_v = \rho_{v0}$ ,  $p_v = p_{v0}$ ,  $\dot{m}_s = 0$ 。其余3个因变量,干区厚度  $\delta$ 、界面蒸发率  $\dot{m}_i$  及体积蒸发率  $\dot{m}_v$  的初始值并不参加运算,不必给出,或者说,都是从零开始。

#### 3. 边界条件

(1) 对应液相水饱和度  $S_l$  的微分方程(5-5-1)的边界条件为在  $z=0$  处,

$$\frac{\partial S_l}{\partial z} = 0 \quad (5-5-16)$$

在  $z=H$  处, 若  $S_l \geq S_{l,c}$ , 边界条件即为式(5-5-10)。当蒸发面退到材料内部, 对于  $S_l \geq S_{l,c}$  区域,  $S_l$  的边界条件为界面条件, 由式(5-5-12)表示。

(2) 对应水蒸气密度  $\rho_v$  的微分方程(5-5-4)的边界条件为

在  $z=H$  处,  $S_l < S_{l,c}$

$$-D_{vs} \frac{\partial \rho_v}{\partial z} = h_m(\rho_v - \rho_{v,e}) \quad (5-5-17)$$

此式与表示材料表面液相水蒸发的式(5-5-11)相仿, 但它们之间有很大差别。这里的  $\rho_v$  是表面处散失的水蒸气密度, 它是由内部水蒸气扩散到表面造成的, 而式(5-5-11)中的  $\rho_v$  虽然也是表面处的水蒸气密度, 但它是由内部液相水扩散至表面并在表面由液相水转化成水蒸气所造成的, 且水蒸气密度唯一取决于表面温度, 是表面温度对应的饱和水蒸气密度。

方程(5-5-4)的另一个边界条件在  $S_l = S_{l,c}$  移动界面处。根据质量守恒原则, 可得

$$-D_{vs} \frac{\partial \rho_v}{\partial z} = \dot{m}_i \quad (5-5-18)$$

式(5-5-18)的含义是, 移动界面上液相水的蒸发率等于传向  $S_l < S_{l,c}$  干区域水蒸气质量流密度(或称质量扩散流率)。

(3) 对应温度  $t$  的微分方程(5-5-5)的边界条件为

在  $z=0$  处,

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (5-5-19)$$

在  $z=H$  处, 若  $S_l \geq S_{l,c}$

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = h(t_e - t) - \dot{m}_s \gamma \quad (5-5-20)$$

此式的含义是, 环境对材料表面的热流密度扣除单位时间单位面积上液相水蒸发成水蒸气所需热量(等号右边)等于以导热方式传向材料内部的热流密度(等号左边)。

在  $z=H$  处, 若  $S_l < S_{l,c}$ ,

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = h(t_e - t) \quad (5-5-21)$$

式(5-5-21)表示材料表面已没有液相水的蒸发, 且忽略水蒸气散失至环境中所携

带的能量。

作为  $S_l < S_{l,c}$  干区的另一个边界,即介于干、湿两区移动界面,能量守恒方程为

$$\left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right)_{S_l < S_{l,c}} + \left( D_{ls} \phi \rho_l c_l \frac{\partial S_l}{\partial z} t \right)_{S_l > S_{l,c}} - \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right)_{S_l > S_{l,c}} = \dot{m}_i \gamma \quad (5-5-22)$$

式(5-5-22)的含义是,从  $S_l < S_{l,c}$  区域内以导热方式以及从  $S_l \geq S_{l,c}$  区域液相水扩散传到界面的热流密度扣除以导热方式传向  $S_l \geq S_{l,c}$  区域的热流密度等于界面上蒸发所消耗的热量。式(5-5-22)也是方程(5-5-5)的边界条件。

总之,当  $z = H$  处  $S_l < S_{l,c}$  条件下,对  $S_l \geq S_{l,c}$  的湿区,两个边界条件为式(5-5-19)与式(5-5-22),对  $S_l < S_{l,c}$  的干区,两个边界条件为式(5-5-22)与式(5-5-21)。

#### 4. 物理条件

物理条件中与 5.4 节相同部分不再重复,但在本节模型中,引入了水蒸气的质扩散率  $D_{vs}$ ,关于水在多孔材料中扩散率  $D_{ls}$  与 5.4 节也有所不同,详见 5.5.4 节。

### 5.5.3 差分方程

本节模型的离散区域与 5.4 节基本相同,但由于本节中存在蒸发移动界面,反映在离散区域内有新的变化,如图 5-29 所示。 $S_l > S_{l,c}$  的湿区域,  $1 \leq j \leq JZIN$ ;  $S_l < S_{l,c}$  的干区域,  $JZIN < j \leq JZ$ ,  $j = JZIN$  是移动界面占有的单元。

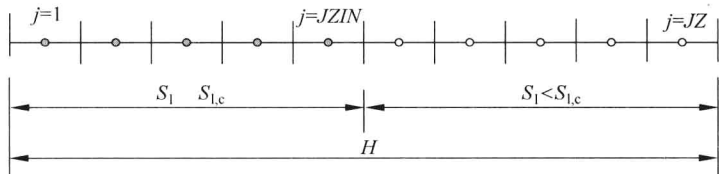


图 5-29 含移动界面离散区域的单元与节点

现将上述 5.5.2 节中介绍的诸因变量的控制方程及相应定解条件逐一写成差分方程。为便于求解,都为显式差分格式。

#### 5.5.3.1 液相水饱和度

在  $S_l \geq S_{l,c}$  区域,对应于  $1 \leq j \leq JZIN$ ,其中  $1 < j < JZIN$  属于内部单元,由控

制方程(5-5-1)可得差分方程,所得差分方程与式(5-4-20)相同,即为

$$S_{l,j}^{n+1} = S_{l,j}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} [D_{ls,j-1,j} (S_{l,j-1}^n - S_{l,j}^n) + D_{ls,j+1,j} (S_{l,j+1}^n - S_{l,j}^n)] \quad (5-5-23)$$

在  $j=1$  边界处,由边界条件(5-5-16)可得差分方程,所得差分方程与式(5-4-21)相同,即为

$$S_{l,j}^{n+1} = S_{l,j}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} D_{ls,j+1,j} (S_{l,j+1}^n - S_{l,j}^n) \quad (5-5-24)$$

在  $j=JZIN$  边界处,若  $JZIN=JZ$ ,即材料表面  $S_l \geq S_{l,c}$ ,将边界条件式(5-5-10)用控制容积法写成相应地差分方程为

$$S_{l,j}^{n+1} = S_{l,j}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} D_{ls,j-1,j} (S_{l,j-1}^n - S_{l,j}^n) - \dot{m}_s^n \frac{\Delta\tau}{\rho_l \phi \Delta z} \quad (5-5-25)$$

式中的  $\dot{m}_s^n$  由而后介绍的式(5-5-38)求得,上式与式(5-4-22)相同。

若  $JZIN < JZ$ ,由界面方程式(5-5-12)用控制容积法写成相应地差分方程,其形式与式(5-5-25)相同,只是(5-5-25)中的  $\dot{m}_s^n$  用  $\dot{m}_{n,j}^n$  替代,且  $\dot{m}_{n,j}^n$  由而后介绍的式(5-5-39)求得。

在  $JZIN < JZ$  条件下,材料内存在  $S_l < S_{l,c}$  区域,对应式(5-5-3),可得差分方程为

$$S_{l,j}^{n+1} = S_{l,j}^n e^{-C\Delta\tau} \quad (5-5-26)$$

### 5.5.3.2 水蒸气密度

水蒸气密度  $\rho_v$  的求解域只在  $S_l < S_{l,c}$  区域内,  $JZIN < j \leq JZ$ ,其中  $JZIN + 1 < j < JZ$  为内单元,由式(5-5-4)可得

$$\rho_{v,j}^{n+1} = \rho_{v,j}^n + \frac{\Delta\tau}{\phi} \left[ \frac{D_{vs}}{\Delta z^2} (\rho_{v,j-1}^n - 2\rho_{v,j}^n + \rho_{v,j+1}^n) + \dot{m}_{v,j}^n \right] \quad (5-5-27)$$

表面单元,  $j=JZ$ ,将边界条件式(5-5-17)用控制容积法写成相应地差分方程,即为

$$\rho_{v,j}^{n+1} = \rho_{v,j}^n + \frac{\Delta\tau}{\phi} \left[ \frac{D_{vs}}{\Delta z^2} (\rho_{v,j-1}^n - \rho_{v,j}^n) + \dot{m}_{v,j}^n - \frac{h_m}{\Delta z} (\rho_{v,j}^n - \rho_{v,e}^n) \right] \quad (5-5-28)$$

在邻近交界面的单元,  $j=JZIN+1$  处,且  $JZIN+1 < JZ$ ,将界面条件

式(5-5-18)用控制容积法写成相应地差分方程,即为

$$\rho_{v,j}^{n+1} = \rho_{v,j}^n + \frac{\Delta\tau}{\phi} \left[ \frac{D_{vs}}{\Delta z^2} (\rho_{v,j+1}^n - \rho_{v,j}^n) + \dot{m}_{v,j}^n + \frac{\dot{m}_{i,j}^n}{\Delta z} \right] \quad (5-5-29)$$

当  $j = JZIN + 1 = JZ$ , 即该单元的一边与交界面相邻, 另一边与环境相邻, 则结合式(5-5-28)与式(5-5-29)可写为

$$\begin{aligned} \rho_{v,j}^{n+1} = \rho_{v,j}^n + \frac{\Delta\tau}{\phi} \left[ \frac{D_{vs}}{\Delta z^2} (\rho_{v,j-1}^n - \rho_{v,j}^n) + \dot{m}_{v,j}^n \right. \\ \left. + \frac{\dot{m}_{i,j}^n}{\Delta z} - \frac{h_m}{\Delta z} (\rho_{v,j}^n - \rho_{v,e}^n) \right] \end{aligned} \quad (5-5-30)$$

当  $JZIN = 0$ , 则  $j = 1$  处的边界差分方程仍为式(5-5-29), 且其中  $\dot{m}_{i,j} = 0$ 。

### 5.5.3.3 温度

#### 1. $S_l \geq S_{l,c}$ 区域

在  $S_l \geq S_{l,c}$  区域, 对应于  $1 \leq j \leq JZIN$ , 其中  $1 < j < JZIN$  属于内部单元, 由控制方程(5-5-5)可得差分方程, 所得差分方程与式(5-4-25)相同, 即

$$\begin{aligned} t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j} (t_{j-1}^n - t_j^n) + \lambda_{j+1,j} (t_{j+1}^n - t_j^n) \\ + D_{ls,j-1,j} \phi \rho_l c_l (S_{l,j-1}^n - S_{l,j}^n) t_{j-1}^n \\ - D_{ls,j+1,j} \phi \rho_l c_l (S_{l,j}^n - S_{l,j+1}^n) t_j^n] \end{aligned} \quad (5-5-31)$$

其中,  $\lambda_{j-1,j}$  与  $\lambda_{j+1,j}$  已被表示为式(5-4-26)与式(5-4-27)。

对于  $j = 1$  单元, 由边界条件(5-5-19)可得差分方程, 所得差分方程与式(5-4-28)相同, 即为

$$t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j+1,j} (t_{j+1}^n - t_j^n) - D_{ls,j+1,j} \phi \rho_l c_l (S_{l,j}^n - S_{l,j+1}^n) t_j^n] \quad (5-5-32)$$

对于  $j = JZIN$ , 且  $JZIN = JZ$  单元, 由边界条件(5-5-20)可得差分方程, 所得差分方程与式(5-4-29)相同, 即为

$$\begin{aligned} t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j} (t_{j-1}^n - t_j^n) + D_{ls,j-1,j} \phi \rho_l c_l (S_{l,j-1}^n - S_{l,j}^n) t_{j-1}^n \\ + h(t_e - t_j^n) \Delta z - \dot{m}_s^* \gamma \Delta z] \end{aligned} \quad (5-5-33)$$

当  $JZIN < JZ$  时, 尚需补充  $j = JZIN$  单元的方程, 为此, 将干、湿两区移动界面上能量平衡关系式(5-5-22)用控制容积法写成相应地差分方程, 即为

$$t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j}(t_{j-1}^n - t_j^n) + \lambda_{j+1,j}(t_{j+1}^n - t_j^n) + D_{ls,j-1,j} \phi \rho_l c_l (S_{l,j-1}^n - S_{l,j}^n) t_{j-1}^n - \dot{m}_{l,j}^n \gamma \Delta z] \quad (5-5-34)$$

式(5-5-34)是在  $JZIN < JZ$  条件下的一个边界条件。

## 2. $S_l < S_{l,c}$ 区域

在  $S_l < S_{l,c}$  区域, 对应于  $JZIN+1 \leq j \leq JZ$ , 其中  $JZIN+1 < j < JZ$  属于内部单元, 其差分方程由式(5-5-6)可得

$$t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j}(t_{j-1}^n - t_j^n) + \lambda_{j+1,j}(t_{j+1}^n - t_j^n) - \dot{m}_{v,j}^n \gamma \Delta z^2] \quad (5-5-35)$$

此外, 尚需补充  $j = JZIN+1$  单元的方程。若  $JZIN+1 < JZ$ , 则

$$t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j}(t_{j-1}^n - t_j^n) + \lambda_{j+1,j}(t_{j+1}^n - t_j^n) + \dot{m}_{l,j}^n \gamma \Delta z - \dot{m}_{v,j}^n \gamma \Delta z^2] \quad (5-5-36)$$

式(5-5-36)是在  $S_l < S_{l,c}$  区域内的一个边界条件。另一个边界条件则由式(5-5-21)提供, 将式(5-5-21)用控制容积法写得

$$t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j}(t_{j-1}^n - t_j^n) - \dot{m}_{v,j}^n \gamma \Delta z^2 + h(t_e - t_j^n) \Delta z] \quad (5-5-37)$$

当  $j = JZIN+1 = JZ$ , 即该单元的一边与交界面相邻, 另一边与环境相邻, 则结合式(5-5-36)与式(5-5-37)可写为

$$t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j}(t_{j-1}^n - t_j^n) + \dot{m}_{l,j}^n \gamma \Delta z - \dot{m}_{v,j}^n \gamma \Delta z^2 + h(t_e - t_j^n) \Delta z] \quad (5-5-38)$$

### 5.5.3.4 表面蒸发率、界面蒸发率与体积蒸发率

表面与界面上的蒸发率由式(5-5-11)与式(5-5-14)表示。当  $S_{l,JZ}^n > S_{l,c}$  时, 将式(5-5-11)写成

$$\dot{m}_s^{n+1} = h_m (\rho_{v,JZ}^n - \rho_{v,e}) \quad (5-5-39)$$

其中  $\rho_{v,JZ}^n$  由当时当地温度  $t_{JZ}^n$  决定, 即当地温度对应下的饱和水蒸气密度。

当  $S_{l,JZ}^n < S_{l,c}$ , 即在  $JZIN < JZ$  条件下,  $j = JZIN$  的界面蒸发率由式(5-5-14)求得, 写成

$$\dot{m}_{i,j}^{n+1} = \frac{D_{vs}}{\delta^n} (\rho_{v,j}^n - \rho_{v,e}) \quad (5-5-40)$$

其中  $\rho_{v,j}^n$  由当时当地 ( $j=JZIN$ ) 温度  $t_j^n=JZIN$  决定, 即当地温度对应下的饱和水蒸气密度。

体积蒸发率的差分方程由式(5-5-15)求得

$$\dot{m}_{v,j}^{n+1} = \rho_l \phi \frac{S_{l,j}^n - S_{l,j}^{n+1}}{\Delta \tau} \quad (5-5-41)$$

### 5.5.3.5 干区厚度

因变量干区厚度  $\delta$  的差分形式由式(5-5-13)求得, 为此, 将式(5-5-13)改写成

$$\Delta \delta = \frac{\dot{m}_{i,JZIN} \Delta \tau}{\phi \rho_l (S_{l,JZIN} - S_{l,e})} \quad (5-5-42)$$

式(5-5-42)等号右边显示的是在时间  $\Delta \tau$  内单位面积上蒸发的质量  $\dot{m}_{i,JZIN} \Delta \tau$  与材料内部损失的液相水的质量  $\phi \rho_l (S_{l,JZIN} - S_{l,e})$  之比, 这个比值正是交界面在  $\Delta \tau$  时间内后退的距离  $\Delta \delta$ 。让式(5-4-42)对时间进行积分, 即随  $\Delta \tau$  的累计, 交界面后退距离就随之增加。式(5-4-43)所示即为从过程开始到时间  $\tau$  的蒸发界面 ( $S_l = S_{l,e}$ ) 的后退距离, 其差分形式是一个简单的表达式如下:

$$\delta^{n+1} = (JZ - JZIN) \times \Delta z \quad (5-5-43)$$

### 5.5.3.6 由热力学关系式决定的水蒸气密度与水蒸气压力

对应于式(5-5-7)、式(5-5-8)与式(5-5-9), 它们的差分形式分别为

$$\rho_{v,j}^{n+1} = f_\rho(t_j^{n+1}) \quad (5-5-44)$$

$$p_{v,j}^{n+1} = f_p(t_j^{n+1}) \quad (5-5-45)$$

与

$$p_{v,j}^{n+1} = \rho_{v,j}^{n+1} \frac{RT_j^{n+1}}{M_v} \quad (5-5-46)$$

综上所述, 当材料表面  $S_l \geq S_{l,e}$  条件下, 由式(5-5-23)~式(5-5-25)、式(5-5-31)~式(5-5-33)、式(5-5-39)、式(5-5-44)及式(5-5-45)求解 5 个因变量  $S_{l,j}^n$ 、 $t_j^n$ 、 $\dot{m}_s^n$ 、 $\rho_{v,j}^n$  与  $p_{v,j}^n$ 。而当材料被分成  $S_l < S_{l,e}$  干区与  $S_l \geq S_{l,e}$  湿区两个区域后, 在  $S_l \geq S_{l,e}$  湿区内, 由式(5-5-23)~式(5-5-25)、式(5-5-31)、式(5-5-32)、式(5-5-34)、

式(5-5-40)、式(5-5-43)~式(5-5-45)求解 6 个因变量  $S_{l,j}^n$ 、 $t_j^n$ 、 $\dot{m}_{l,j}^n$ 、 $\delta^n$ 、 $\rho_{v,j}^n$  与  $p_{v,j}^n$ 。在  $S_l < S_{l,c}$  区域内,由式(5-5-26)~式(5-5-30)、式(5-5-35)~式(5-5-38)、式(5-5-41)和式(5-5-46)求解 5 个因变量  $S_{l,j}^n$ 、 $\rho_{v,j}^n$ 、 $t_j^n$ 、 $\dot{m}_{v,j}^n$  与  $p_{v,j}^n$ 。由于这些差分方程都是显式的,在已知初始值后不难求解。

#### 5.5.4 算例及计算结果讨论

本算例的已知条件大都与 5.4.4 节算例相同,相同部分不再重复。不同的是,在本例中引入新的物性参数水蒸气的质扩散率  $D_{vs} = \phi D_{ab}$ ,其中  $D_{ab}$  为双组分气体的相互质扩散率,取为  $0.26 \times 10^{-4}$  m/s。液相水的质扩散率  $D_{ls} = (S_l - S_{l,c}) \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s。

在上述已知条件下通过求解由式(5-5-23)~式(5-5-46)组成的差分方程组可得到因变量温度  $t$  与热流密度  $q$ 、液相水饱和度  $S_l$ 、水蒸气密度  $\rho_v$  与水蒸气压力  $p_v$ 、表面蒸发率  $\dot{m}_s$  与体积蒸发率  $\dot{m}_v$  以及界面位置  $\delta$  和蒸发率  $\dot{m}_i$  在材料内的分布以及随时间的变化。下面结合图 5-30~图 5-40 显示的计算结果进行讨论。

##### 5.5.4.1 关于温度与热流密度

图 5-30~图 5-34 显示了温度与热流密度曲线。由图 5-30 与图 5-33 可见,就温度与热流密度变化规律而言,材料加热过程可分为四个阶段。

第一阶段(1),如图 5-30 所示,材料内各处温度由初始值迅速上升至接近环境湿球温度(25℃);在图 5-33 显示,热流密度迅速下降而渐近于某一稳定值。在这个阶段,材料内的温度分布从表面到底部由高到低,表面与底部的温度差别由小而大再由大变小。这一特征从图 5-32 可看到,温度分布由初始的水平线而变成弯曲线,而后又变成近似水平线。相应地,导热热流密度在材料内的分布从表面到底部也是从大到小。

第二阶段(2),如图 5-30 与 5-33 所示,材料温度与热流密度都维持基本不变,温度在环境湿球温度附近,略低于湿球温度。在图 5-32 中,这一阶段的温度分布表现为一条近似水平线,且不随时间变化。热空气以对流方式到达表面的热流密度大部分被挡在表面上,用于液相水的蒸发,除了表面处有很大的热流密度,材料内部各处都比较小,这一过程持续到材料表面的液相水饱和度  $S_l$  降至  $S_{l,c}$ 。上述两个阶段材料所经历的过程与 5.4.4 节中算例的情形基本相同。

第三阶段(3)自材料表面的液相水饱和度  $S_{l,jz} = S_{l,c}$  开始,形成一个界面。此后,该液相水蒸发的界面自材料表面向内部平移。在移动过程中,材料自表面起到



底部依次由湿变干。当表面单元成为干区后,蒸发率下降,温度迅速升高,环境对材料表面的温度差减小,相应地,环境对材料表面的热流密度减小。表面干单元从环境获得的热量,除小部分用于自身温度的提高,大部分以导热方式传入内部。从图 5-33 可清楚看到,当表面单元进入干区后,表面热流密度迅速下降并与次表面(图中对应单元 9)热流密度十分接近。移动的界面将材料划分成上( $S_l < S_{l,c}$ )与下( $S_l \geq S_{l,c}$ )的干与湿的两个区域。 $S_l < S_{l,c}$ 的干区,温度明显升高。 $S_l \geq S_{l,c}$ 的湿区,其温度变化的趋向取决于界面上热流密度、界面单元液相水饱和度、液相水质扩散率、界面上的蒸发率等因素。若界面热流密度比较小,液相水饱和度比较高,液相水质扩散率比较高,界面上蒸发率比较大,则湿区的温度可以继续保持在湿球温度附近而不变,甚至可能下降。若界面热流密度比较大,液相水饱和度比较低,液相水质扩散率比较低,界面上蒸发率比较小,则湿区的温度不断升高,如图 5-30 所示。图 5-31 显示了加热第三阶段干、湿两区共存材料的温度变化,它是从图 5-30 的曲线中切割出来并进行放大。反映在图 5-32 中,干区与湿区内的温度分布有较明显的差别。

干、湿两个区域内热流密度有很大不同,在交界面处热流密度发生跃阶变化,这些特征清楚地反映在图 5-34 中。

当整个材料的液相水饱和度  $S_l$  降至束缚饱和度  $S_{l,c}$  以下,表示第三阶段结束,过程进入第四阶段(4)。在第四阶段中,材料内部温度分布逐渐趋于均匀,材料表面与底部的温度差逐渐缩小。与此同时,热流密度随着材料温度升高而逐渐减小,直至材料温度趋于环境温度( $50^\circ\text{C}$ ),热流密度趋于零。

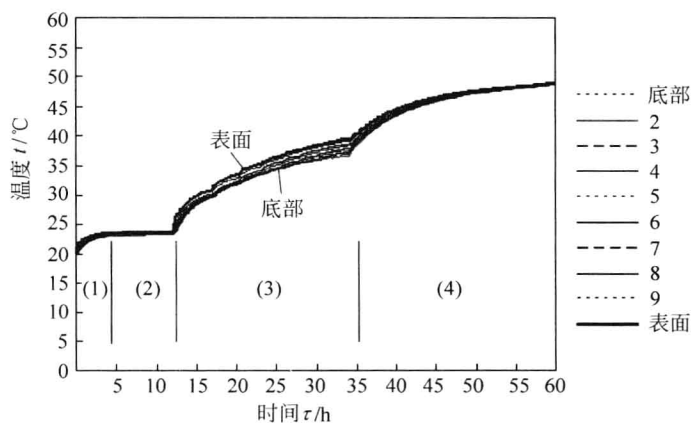


图 5-30 材料内温度分布随时间变化

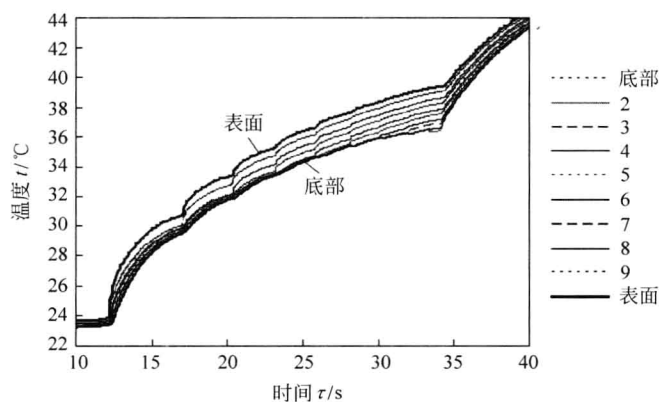


图 5-31 材料干、湿区内温度分布随时间变化

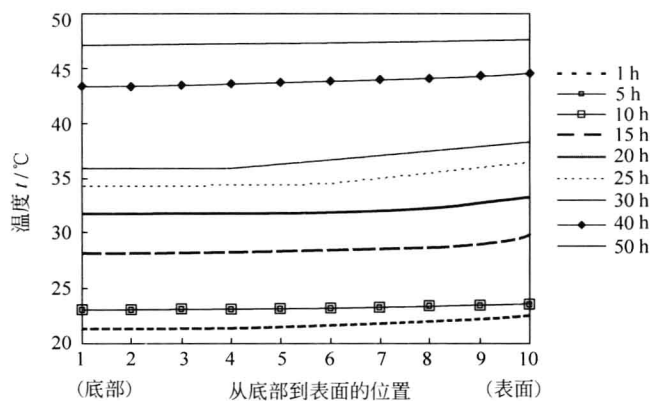


图 5-32 不同时刻下材料内温度分布

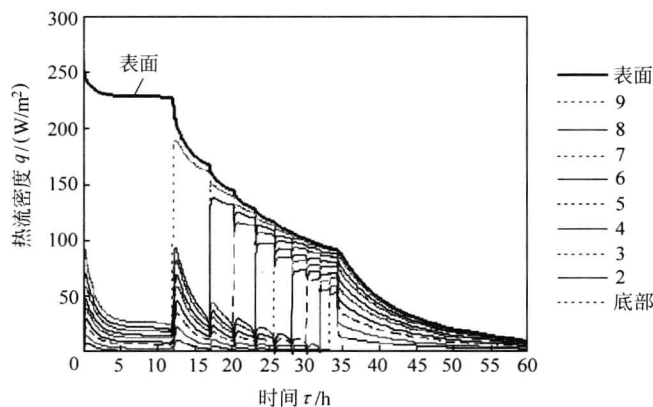


图 5-33 热流密度分布随时间变化

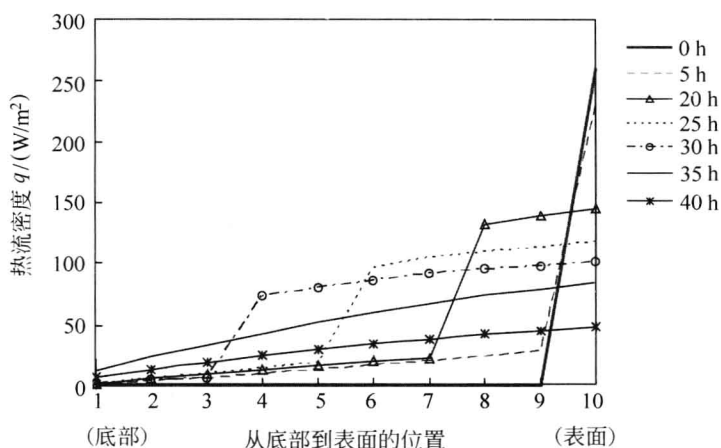


图 5-34 不同时刻下板内热流密度分布

#### 5.5.4.2 关于液相水饱和度

图 5-35 与图 5-36 显示了液相水饱和度  $S_l$  的响应曲线。图 5-35 中三条曲线分别代表材料底部与表面以及整个材料平均的液相水饱和度的变化过程。与温度响应曲线相仿,液相水饱和度响应也可分为四个阶段。

第一阶段(1),从图 5-35 的曲线中看到,随加热过程开始,底部与表面液相水饱和度的差别从 0 逐渐加大,反映在图 5-36 中  $S_l$  的分布由一条水平直线而变成近似抛物线。

第二阶段(2),图 5-36 中对应于  $\tau=1\text{ h}$ 、 $5\text{ h}$  与  $10\text{ h}$  的曲线是一簇近似于平行的抛物线,且平行地由上向下移动。在图 5-35 中,底部与表面液相水饱和度  $S_{l,b}$  与  $S_{l,z}$  是两条距离渐行渐大的曲线。

当过程进入第三阶段后,  $S_l = S_{l,c}$  分界面由材料表面向底部平移。这个分界面也使  $S_l$  在材料内的分布曲线发生显著变化,光滑的抛物线只存在  $S_l > S_{l,c}$  的区域,在移动交界面附近  $S_l$  的变化显得十分陡峭,如图 5-36 中对应于  $\tau=15\text{ h}$ 、 $20\text{ h}$  与  $25\text{ h}$  曲线所示。在图 5-35 中,材料液相水饱和度平均值  $S_{l,m}$  的下降速度明显放慢。

当整个材料  $S_l < S_{l,c}$  时,过程进入第四阶段。  $S_l$  的分布曲线在图 5-36 中呈现为近似一条直线,在图 5-35 中表现为表面与底部的曲线越来越接近。

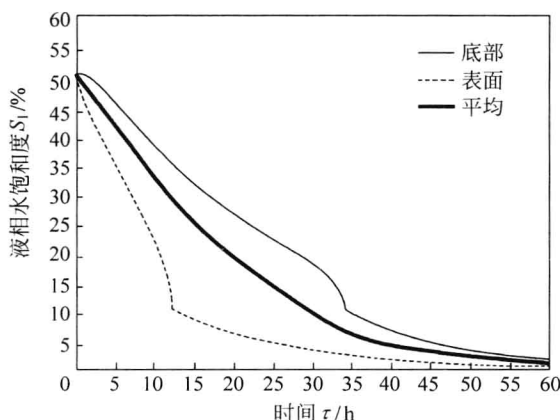


图 5-35 材料内水饱和度分布随时间变化

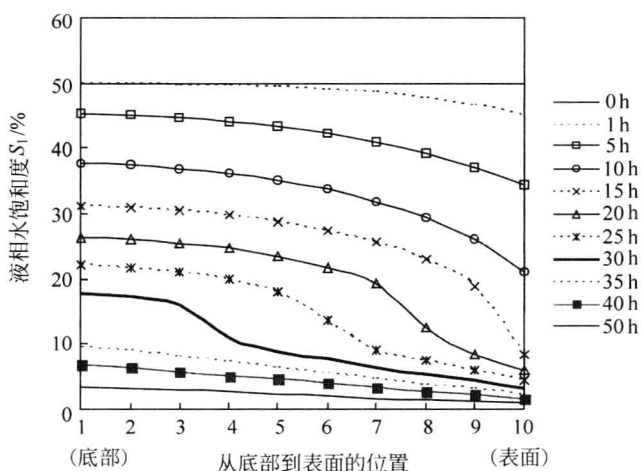


图 5-36 不同时刻液相水饱和度的分布

#### 5.5.4.3 关于表面蒸发率、界面蒸发率与体积蒸发率

将表面蒸发率 $\dot{m}_s$ 与界面蒸发率 $\dot{m}_i$ 一起绘制在图 5-37, 其中粗实线代表表面蒸发率 $\dot{m}_s$ , 细实/虚线代表界面蒸发率 $\dot{m}_i$ 。由图 5-37 可见, 在加热过程的第一与第二阶段, 蒸发过程发生在材料表面。在第一阶段, 表面蒸发率迅速上升至某一稳定值。在第二阶段, 蒸发率基本维持在稳定值。在进入第三阶段后, 蒸发面从表面退到材料内部  $S_l = S_{l,c}$  的界面处。这个移动的界面从材料表面到底部不断后退过

程中,蒸发率在逐步减小。图 5-37 所示的曲线清晰地表示了这个界面不断后退及蒸发率逐级下降的过程。

在加热第一与第二阶段,蒸发面处于材料表面时,此表面接受热空气流的对流加热,而当第三阶段,蒸发面进入材料内部后,表面处由于脱离了湿区,温度明显升高,使传向材料表面的对流传热热流密度减小,从而由表面到移动界面的导热热流密度减小,进而使界面上的蒸发率逐渐减小。

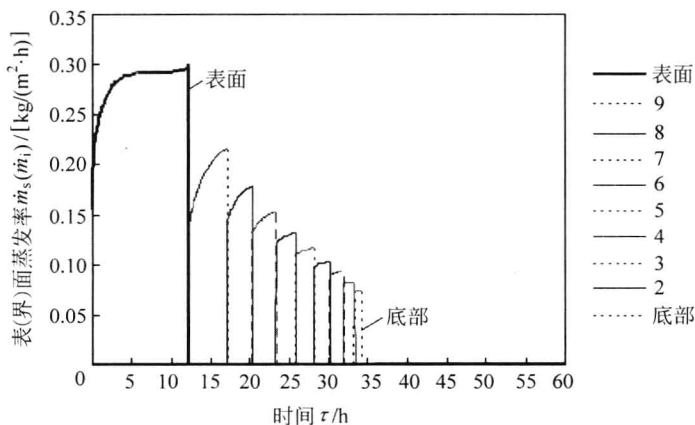


图 5-37 表(界)面蒸发率随时间变化

体积蒸发是指多孔材料内部液相水的就地蒸发。在  $S_l \geq S_{l,c}$  区域内,也存在就地蒸发现象,但就对液相水饱和度的影响而言,它比液相水的扩散要小得多,因此,在本节物理模型中予以忽略。在  $S_l < S_{l,c}$  区域内,液相水失去扩散能力,只能就地蒸发。液相水的迁移是借助于液相水自身就地蒸发成水蒸气,再由水蒸气的扩散来实现的。图 5-38 显示了体积蒸发率  $\dot{m}_v$  的变化规律。由于  $\dot{m}_v$  发生在  $S_l < S_{l,c}$  区域内,所以每处的  $\dot{m}_v$  曲线是从该处的  $S_l$  降至  $S_{l,c}$  时才开始。由于在物理模型中已假定体积蒸发率正比于当地的液相水饱和度,所以,  $\dot{m}_v$  的变化曲线为一条指数函数曲线,从  $S_l = S_{l,c}$  处的最大值逐渐减小。

对比图 5-38 与图 5-37 看到,  $\dot{m}_v$  的最大值约为  $3 \text{ kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{h})$ , 而  $\dot{m}_s$  的最大值约为  $0.3 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{h})$ 。这里,  $\dot{m}_v$  与  $\dot{m}_s$  使用不同的单位,若只从数值上看,  $\dot{m}_v$  比  $\dot{m}_s$  大 10 倍。但结合本算例实际材料的尺寸,对这块板材而言,将  $\dot{m}_v$  与  $\dot{m}_s$  使用共同的单位  $\text{kg}/\text{h}$ , 则  $\dot{m}_s$  为  $0.3 \text{ kg}/\text{h}$ , 而  $\dot{m}_v$  约为  $0.1 \text{ kg}/\text{h}$ 。两者对比,表面蒸发还是主要的。

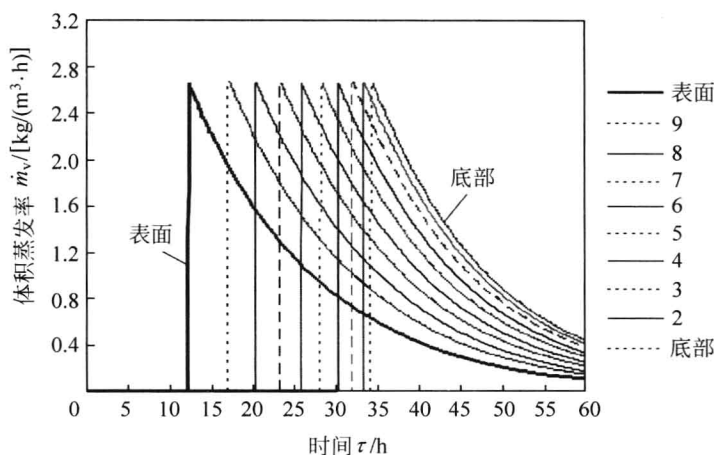


图 5-38 体积蒸发率随时间变化

#### 5.5.4.4 关于水蒸气密度与压力

图 5-39 显示了水蒸气密度分布随时间变化的曲线。在加热过程的第一与第二阶段,材料内各处液相水与气相水蒸气始终处于相平衡状态,水蒸气密度唯一取决于当地温度。因此,图 5-39 中水蒸气密度的曲线与图 5-30 中温度曲线相似,而在图 5-40 中,水蒸气密度在平板内分布显示为近似一条水平线。在第一阶段,这条水平线向上平移;在第二阶段,这条水平线原地不动,不随时间变化。当进入加热第三阶段,图 5-39 中的曲线表现为从彼此重叠而变成分散,在图 5-40 中,表现为从一条水平线而变成弯曲线,这条弯曲线由两部分组成,一部分,在  $S_l \geq S_{l,c}$  湿区域,水蒸气密度仍处于饱和状态,水蒸气密度  $\rho_v$  表现为近似于水平线向上平移,另一部分,在  $S_l < S_{l,c}$  区域,水蒸气密度不再处于饱和状态,它由当地液相水蒸发以及与相邻处进行水蒸气扩散两个过程决定。这样,在  $S_l < S_{l,c}$  干区域内,一端是  $S_l = S_{l,c}$  的移动界面,当地的水蒸气密度为当地温度对应下的饱和水蒸气密度,而另一端是与热空气环境相邻的材料表面。无疑,水蒸气将从界面扩散到表面。这里需强调的是,在  $S_l < S_{l,c}$  区域内,在靠近移动界面处,由于接受从界面上蒸发出来以及当地自身蒸发的水蒸气质量使当地的水蒸气密度  $\rho_v$  升高。因此,  $\rho_v$  的分布曲线在  $S_l < S_{l,c}$  区域内出现极大值,图 5-40 中显示了这一极大值的存在,且极值点的位置是邻近于蒸发界面。这样,随着蒸发界面由表面移动至底部,水蒸气密度最大值的位置也由表面移动到底部。至此,加热第三阶段结束。

在加热第四阶段,整个材料都处于  $S_l < S_{l,c}$  状态,尽管区域内仍有水蒸气源,水蒸气密度分布则是单调地由材料底部至材料表面不断下降。从图 5-39 曲线看到,在整个材料刚进入第四阶段,即整个材料不再再有湿区,在一段时间内,材料底部的水蒸气的密度可能会继续升高。这是因为,材料底部仍有较多的液相水,较大的体积蒸发率及此处的水蒸气不易被迅速扩散到表面的缘故。随着时间推延,材料内水蒸气密度分布趋于平坦,最终趋近环境水蒸气密度  $\rho_{v,e}$ 。

关于水蒸气压力变化的规律与水蒸气密度变化的规律十分相近,这里就不再附图说明。

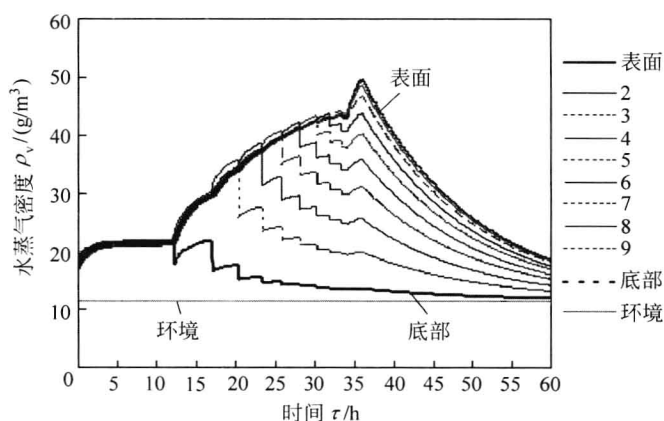


图 5-39 材料内水蒸气密度随时间变化

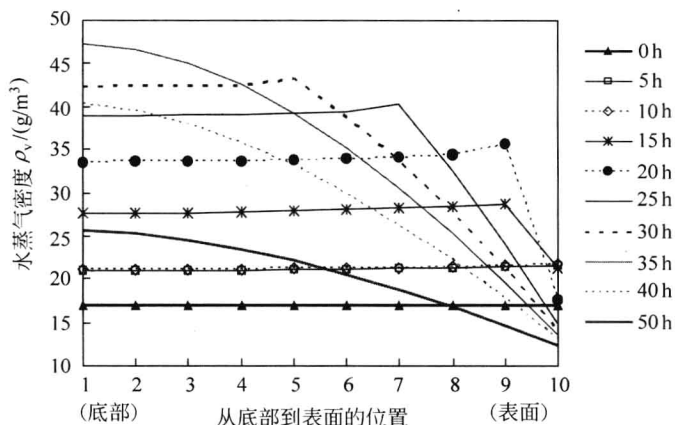


图 5-40 不同时刻水蒸气密度的分布

## 5.6 三种模型小结

本章前几节针对图 5-1 所示的同一个研究对象提出了集总参数、一维扩散及一维扩散-蒸发共计三个模型及其数值分析的结果。也就是,对同一个问题,由于构建的物理模型不同而给出了三种回答。

现将这三个模型的最主要预测结果,即含水多孔材料平板的温度  $t$  与液相水饱和度  $S_l$  随时间的变化显示在图 5-41 及图 5-42 中以便比较与分析。为叙述方便,将集总参数模型、一维扩散模型及一维扩散-蒸发模型按顺序简称为模型 1、模型 2 与模型 3。

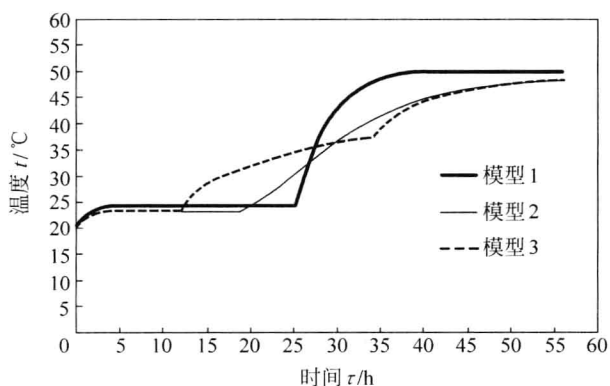


图 5-41 三种模型预测的温度随时间变化

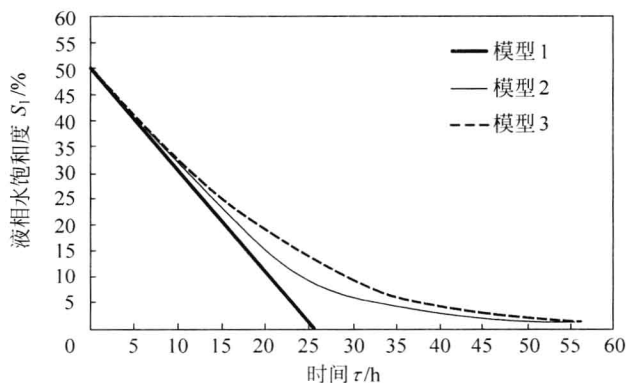


图 5-42 三种模型预测的液相水饱和度随时间变化



观察图 5-41 及图 5-42 所示曲线,对比三种模型的预测结果,我们应该有如下的印象与启发。

### (1) 各种模型各具特色。

在模型 1 中,简化了各预测参数在材料内的分布,用集总代替分布,将原本的偏微分方程组简化成常微分方程组,有利于考虑更多的因素,例如气相中空气、水蒸气及混合气体压力、密度与速度随时间的变化。模型 1 预测了含水多孔材料平板内 11 个因变量的变化规律。从模型 1 的预测结果中看到,像图 5-1 所示的这样研究对象,多孔材料内的气相速度极小,混合气体压力始终处于与环境压力相接近,它们对整个含水多孔材料平板的热响应影响甚微,以至可忽略不计,在文献<sup>[9]</sup>中也有相同的论述。这一预测结果为构筑模型 2 提供了依据。当然,这一结论是在本章例题条件下,也就是说,在材料尺度小及加热过程缓慢这样的条件下成立。

顺便指出,如果根据模型 1 预测结果,再建立一个更简化的集总参数模型,即只有温度与液相水饱和度两个因变量,同样可得到几乎相同的预测结果。

在模型 1 的基础上,放弃集总参数的假定,忽略混合气体压力变化及气相速度的影响,建立了模型 2。

在模型 2 中,认为多孔材料内的水分始终是以液相水扩散的方式由内部传输到表面,然后在表面蒸发成水蒸气。由此,如图 5-23~图 5-25 所示,材料内部液相水饱和度呈分布状态,这种分布在材料整个加热过程中是变化的。而温度在材料内几乎不呈分布,即材料内的温度差别比较小。这是由于材料内只有热扩散与液相水质扩散(伴随着热对流),且整个材料的热阻小于表面对流换热热阻。液相水饱和度的分布以及引入在表面液相水饱和度低于某一临界值后表面蒸发率与表面液相水饱和度相关的假定,模型成功预测了含水多孔材料在空气流加热过程其蒸发率几乎为常数与随后逐渐下降两个阶段。在模型 2 中,尽管考虑了温度与液相水饱和度的分布,但由于忽略了气相诸多因素的影响,使模型 1 中的 11 个因变量在模型 2 中只保留其中的 3 个,计算得以简化。

模型 3 在模型 2 的基础上,认为在材料加热过程中水分的蒸发先发生在材料表面( $\dot{m}_s$ )而后发生在材料内部( $\dot{m}_i$ ),而当表面液相水饱和度  $S_l$  降至  $S_{l,c}$  后,蒸发的界面将由材料表面而退到材料内部。这一特点使材料内的温度分布与液相水饱和度分布发生了与模型 2 不同的变化,其中液相水饱和度分布不再像模型 2,温度也明显呈分布状态(见图 5-32 与图 5-36)。这些结果有助于分析材料在加热过程可能引起变形与预应力形成<sup>[17,27]</sup>。由于模型 3 更多地考虑到水蒸气在材料内的行为,模型中共含 6 个因变量,其计算较模型 2 稍为繁琐。

### (2) 三种模型预测的结果有共同之处。

因此,在图 5-41 显示的三种模型预测的温度曲线中,在加热的第一与第二阶

段,三者比较接近,都是经历迅速升温过程而趋于某一稳定值,该稳定值接近湿球温度,而后,在此稳定值持续一段时间,当液相水饱和度降到某一值后,温度又继续上升而趋于环境温度。在图 5-42 显示的三种模型预测的液相水饱和度曲线中, $S_l$  从 50% 降至 30% 所需的时间大体相同,此后,三个模型的预测结果有较大差异,而模型 2 与模型 3 在  $S_l$  降至 15% 之后两条曲线又趋接近。

上述三种模型预测结果的诸多共同性说明,在一定条件下,简单的模型也可以得到近乎合理的主要结果。

(3) 三种模型预测结果的不同之处也是明显的。

就材料的温度响应而言,在加热第一阶段,模型 1 经历的时间稍长,达到的稳定值最接近湿球温度。模型 2 与模型 3 中达到的温度稳定值都低于湿球温度。这是因为,对于模型 1,在加热过程进入第二阶段后,材料从环境获得的热量全部用于材料表面的蒸发,以致可以在较高温度下维持。而对模型 2 与模型 3,在加热过程进入第二阶段后,材料从环境获得的热量尽管大部分用于表面蒸发但仍有一部分传向内部,以致蒸发在较低温度下维持。三种模型预测的第二阶段结束的时间不尽相同,按先长后短的顺序为模型 1、模型 2、模型 3。这是因为,模型 1 按表面液相水饱和度  $S_l$  降至 0 作为标准,而模型 2 与模型 3 是按表面液相水饱和度  $S_{l,jz}$  降至  $S_{l,c}$  为标准,所以,模型 1 结束第二阶段需较长的时间。在模型 2 与模型 3 之间,由于模型 2 的水扩散率较模型 3 稍大,在同样时间段内有更多的液相水扩散至表面,这样, $S_{l,jz}$  降至  $S_{l,c}$  需较长的时间。

尽管模型 1 最迟结束第二阶段,但进入第三阶段后,它是最早趋于环境温度。这是因为,在第三阶段,模型 1 的材料已处绝干状态,其热容量小,升温快。模型 2 与模型 3 的材料都有残余液相水,它是有一定潮湿程度的材料,热容量大,升温慢。

对于液相水饱和度  $S_l$ ,按下降速率由快至慢顺序,同样是模型 1、模型 2、模型 3。这是因为,模型 1 的材料其液相水扩散率为无穷大,而模型 2 与模型 3 都是有限值。在模型 2 与模型 3 之间,由于模型 2 的水扩散率较模型 3 稍大,模型 2 的  $S_l$  下降速率就大于模型 3。如果模型 2 与模型 3 的水扩散率值相同,则  $S_l$  的变化曲线会十分接近。

从理论上讲,当时间趋于无穷大时  $S_l$  才为 0,这是含水非吸湿材料所具有的性质。

(4) 物理模型的建立要紧扣研究的对象与目的,模型的简繁程度取决于模型的服务对象。

如果只要求对研究的结果作粗略的估算,简单的模型就足够了;若要求较准确的结果或要求分析更多的影响因素,应有更详细的物理模型与数学模型;若要求十

分准确的结果或分析更全面、更完善的过程,也许目前根本就做不到。因为,准确的预测结果不仅有赖于合理的物理模型,准确的数学描述,还依赖包含在数学模型中诸多参数的值是否准确,例如,液相水或气体在多孔材料内的质扩散率、渗透率、多孔材料的导热系数等,这些参数的值准确程度极大地影响着预测结果的准确性,而要获得这些参数的准确数值往往不易做到。

(5) 本章介绍的三个模型虽有差别,但构筑物理模型与数学模型的基本原则是相同的,都是基于质量守恒原则、能量守恒原则与热力学关系式,在模型 1 中还运用了动量关系式。如果在基本原则方面应用不当,难以得到合理的预测结果。

## 习 题

- 5-1 请应用 5.1 节相应公式,核算表 5-2 与表 5-3 中各项数据。即根据已知液相水温度  $20^{\circ}\text{C}$  条件下密度  $\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$ 、表面张力  $\sigma = 0.0728 \text{ N/m}$  以及毛细管半径  $r_0$  的值,计算附加压力  $\Delta p$ 、毛细管液面高度  $H$  以及弯曲与平面液面上饱和水蒸气压力的比  $p_{s,c}/p_{s,p}$ 。
- 5-2 多孔材料被认为由大量直径大小不同的毛细管组成。若假定毛细管半径  $r$  的分布满足正态分布规律,表示为

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{-\frac{(r-r_m)^2}{2\epsilon^2}}$$

式中,  $p(r)$  为毛细管半径  $r$  的分布密度函数,  $r_m$  是毛细管半径平均值,如  $r_m = 10 \mu\text{m}$ ,  $\epsilon$  是标准偏差,如  $\epsilon = 2 \mu\text{m}$ 。

试问:相应地毛细管附加压力  $\Delta p$  是否满足正态分布? 平均值  $\Delta p_m$  及标准偏差  $\epsilon$  多大?

- 5-3 含液体粉末冶金多孔材料平板经受着稳态传热传质过程,如图 5-43 所示。热量从平板右侧传向左侧,已知板内温度分布为一直线,即  $t = t_2 + (t_1 - t_2)x/H$ , 其中  $H$  是板的厚度,  $t_1$  与  $t_2$  分别为  $x = H$  处与  $x = 0$  处的温度。液体从平板左侧渗流(扩散)向右侧,已知  $x = 0$  处,液相饱和度  $S_l = 1$ ; 在  $x = H$  处,  $S_l = 0$ 。多孔材料平板内液相汽化的体积蒸发率为  $\dot{m}_v$ , 且  $\dot{m}_v$  正比于当地温度,如  $\dot{m}_v = \alpha(t - t_2)$ 。

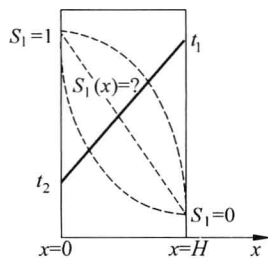


图 5-43

试问: (1) 求液相饱和度  $S_l$  分布的控制方程;

(2)在图中定性地画出  $S_l$  的分布曲线;(3)假设体积蒸发率系数  $\alpha = 0.1 \text{ kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{K})$ , 平板厚度  $H = 10 \text{ cm}$ , 右侧温度  $t_1 = 200^\circ\text{C}$ , 左侧温度  $t_1 = 90^\circ\text{C}$ , 孔隙率  $\phi = 0.4$ , 液相在多孔材料内质扩散率  $D_{ls} = 10^{-8} \text{ m}^2$ 。试用解析解与数值解求解上述问题。

5-4 从 5.3 节图 5-19 中看到, 作为气体渗流速度  $w$  为负值,  $w < 0$ 。

试问: (1)为什么  $w < 0$ ? 你是怎样理解的? (2)这是否意味着在材料被加热过程中气体的质量是增加的? (3)在什么条件下渗流速度  $w$  可能为正值,  $w > 0$ ?

5-5 试分析采用集总参数模型、一维扩散模型及一维扩散-蒸发模型各自的条件是什么? 蒸发后退交界面形成的条件是什么? 其中液相水扩散率起着怎样的作用?

5-6 请看 5.5 节中图 5-37 有关表面蒸发与界面蒸发的曲线。表面蒸发率  $\dot{m}_s$  的曲线在加热第二阶段几乎为一条水平线, 只是在表面单元的  $S_l$  接近  $S_{l,c}$  时稍有升高, 而界面蒸发率  $\dot{m}_{i,j}$  在每个单元由  $S_l > S_{l,c}$  到  $S_l = S_{l,c}$  过程中, 都有明显上升, 试分析其中原因。

## 参 考 文 献

- [1] 傅献彩, 沈文霞等. 物理化学(下册)[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] 傅玉普, 王新平. 物理化学简明教程. 大连: 大连理工大学出版社, 2007.
- [3] 印永嘉, 奚正楷, 张树永. 物理化学简明教程[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [4] INCROPERA F P. DEWITT D P. Fundamentals of heat and mass transfer[M]. 5th ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [5] SIAU J F. Transport processes in wood[M]. Springer-Verlag, 1984.
- [6] DULLIEN F A. Porous media; eluid transport and pore structure[M]. 2nd ed. New York: Academic Press, 1992.
- [7] UTAKE Y. Method of measuring oxygen diffusivity in microporous media[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2009, 52: 3685-3692.
- [8] LI W. The measurement of gas diffusivity in porous materials by temporal analysis of products(TAP)[R]. Catalysis Today, 2007, 121: 246-256.
- [9] LUIKOV A V. Heat and mass transfer in capillary-porous bodies[M]. Pergamon Press, Oxford. 1966.
- [10] TOEI R. Theoretical fundamentals of drying operation[J]. Drying Technology, 1996, 14(1): 1-194.
- [11] CHEROTO S. Lumped-differential formulation for drying in capillary porous media[J].

- Drying Technology, 1997,15(3&4): 811-835.
- [12] LEWIS W K. The rate of drying of solid materials[J]. Ind. Eng. Chem. ,1921,13: 427-432.
- [13] SHERWOOD T K. The drying of solid. Part1[J]. Ind. Eng. Chem. ,1929,21: 12-16.
- [14] SHERWOOD T K. The drying of solid. Part1[J], Ind. Eng. Chem. ,1929,21: 976-980.
- [15] LUIKOV A V. System of differential equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies[J]. Int. Heat and mass transfer. , 1975,18: 1-14.
- [16] CAI L, OLIVEIRA L C. A simulation of wet pocket lumber drying [J]. Drying Technology, 2008,26:1-5.
- [17] PERR P. Fundamentals of wood drying[M]. A. R. BO. LOP. , Nancy, France, 2007.
- [18] SCHLUNDER E U. Drying of porous material during the constant and the falling rate period: a critical review of existing hypotheses[J]. Drying Technology, 2004, 22(6): 1517-1543.
- [19] PLUMB O A. Heat and mass transfer in wood during drying[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1985, 28(9): 1669-1678.
- [20] 帕坦卡 S V. 传热与流体流动的数值计算. 张政译. 北京: 科学出版社, 1984.
- [21] WHITAKER S. Simultaneous heat, mass, and momentum transfer in porous media[J]. A theory of Drying. Advance in Heat transfer. ,1977,13:119-203. New York: Academic press.
- [22] 陶文铨. 数值传热学. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
- [23] 俞昌铭. 热传导及其数值分析. 北京: 清华大学出版社, 1982.
- [24] 奥齐西克 M N. 热传导. 俞昌铭主译. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [25] LU T, SHEN S Q. Numerical and experimental investigation of paper drying: heat and mass transfer with phase change in porous media[J]. Applied Thermal Engineering, 2007, 27: 1248-1258.
- [26] CHOU S K, HAWLADER M N A, CHUA K J. Identification of the receding evaporation front in convective food drying. Drying technology, 1997, 15(5): 1553-1367.
- [27] 王喜明. 木材干燥学. 北京: 中国林业出版社, 2007.

## 第 6 章 Chapter

# 含水吸湿性多孔材料 加热及水分迁移

继上章讨论含水非吸湿性多孔材料之后,本章讨论含水吸湿性多孔材料加热及水分迁移,如图 6-1 所示。

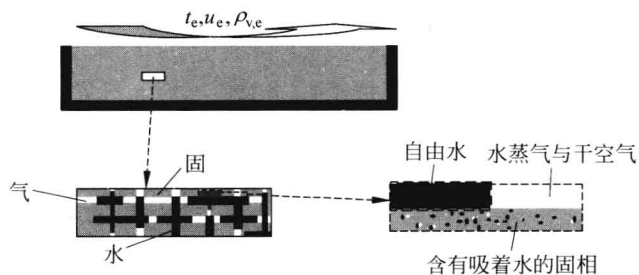


图 6-1 含水吸湿性多孔材料空气对流加热示意图

与含水非吸湿性多孔材料相比,含水吸湿性多孔材料有如下特征:其一,材料内的液相水分为自由水与吸着水。自由水存在于多孔材料的固相骨架间孔隙内,吸着水存在于多孔材料固相骨架内部;其二,液态的吸着水与环境中的气相水蒸气间的相平衡关系不同于自由水与环境的相平衡关系。正是这些基本特征决定了吸湿性多孔材料传热传质行为的特点。

如果说,自由水在多孔材料内存在的形式与由液体表面特定的物理性质决定的毛细管现象相关,那么,吸着水在多孔材料内存在的形式,除了与毛细管现象相关外,还与由固体表面特定的物理化学性质决定的吸附现象相关。

为了正确认识含水吸湿性多孔材料在自然状态下水分存在形式,本章的 6.1 节扼要介绍固体表面吸附现象及等温吸附线。在此基础上,6.2 节介绍吸着水迁移的机理及数学描述;6.3 节介绍如图 6-1 所示吸湿性多孔材料在表面接受空气对流加热条件下传热传质行为。这里,以木材为例,阐述了吸湿性多孔材料的干燥原理及数值分析方法。同样的方法完全可以,而且应该移植到诸如

谷物、棉籽、烟叶、食品及一些化工材料的干燥过程。

## 6.1 固体表面性质及等温吸附线

比表面积大是多孔材料基本特征之一。多孔材料的表面不仅仅指直觉的多孔材料物体外表面,而且包括存在于多孔材料内固相骨架与孔隙交界的面,还包括存在于固相骨架内部更微小孔隙的内表面。这样,固体表面的现象就变成多孔材料的体积现象。

一袋封装的饼干被打开后,饼干渐渐地整体受潮,受潮的程度与空气的湿度与温度有关,还与受潮的时间有关,这是日常生活中常见的现象。这种物体受潮的现象称为固体表面的吸湿现象或吸附现象。相反,把受潮饼干中水分驱逐出去的烘干过程为解吸现象。解吸是吸附的逆过程。

固体表面可以对气体或液体进行吸附的现象早为人们所发现,我国先民早在两千多年前的汉代就知道新烧好的木炭有吸湿、吸臭的性能。湖南长沙马王堆一号汉墓就是用木炭作为防腐层与吸湿剂。近几十年来,新开发的吸附剂越来越多,吸附的应用范围越来越广,如利用吸附除去空气或废水中的杂质、污染物;利用吸附回收少量稀有金属;中药天然产物有效成分的提取分离;药品中抗生素与维生素的提取分离等。总之,吸附的应用涉及到国民经济及人们日常生活各个方面。

在诸如木材这类吸湿多孔材料的加工过程中,正确了解及掌握吸附及解吸规律,对于完善加工工艺及提高产品质量有直接的影响。

下面分别介绍吸附过程及反映吸附平衡条件下定量关系的等温吸附线,解释形成等温吸附线的机理以及给出等温吸附线的数学描述。

### 6.1.1 等温吸附线

当气体在固体表面被吸附时,固体叫吸附剂(adsorbent),被吸附的气体叫吸附质(adsorbate)。吸附量  $Q$  通常用单位质量的吸附剂所吸附气体体积表示,即

$$Q = \frac{V}{m} \quad (6-1-1)$$

式中,  $m$  是吸附剂的质量;  $V$  是被吸附气体体积(在标准状态下)。

吸附量  $Q$  也常用单位质量的吸附剂所吸附气体物质的量来表示,

$$Q = \frac{n}{m} \quad (6-1-2)$$

式中,  $n$  是被吸附气体物质的量。如果吸附质是水蒸气, 常用质量表示, 则式(6-1-2)即为式(1-1-14)定义的含水率。

实验表明, 对于一个给定的系统(即一定的吸附剂与一定的吸附质), 达到平衡时的吸附量  $Q$  与温度  $t$  及压力  $p$  有关。这种关系表示为

$$Q = f(t, p)$$

上式中共有三个变量, 为了找到它们的规律性, 常常固定一个变量, 然后求出其他两个变量之间的关系。例如,

若  $t = \text{常数}$ , 则  $Q = f(p)$ , 称为等温吸附线(adsorption isotherm);

若  $p = \text{常数}$ , 则  $Q = f(t)$ , 称为等压吸附线(adsorption isobar);

若  $Q = \text{常数}$ , 则  $p = f(t)$ , 称为等量吸附线(adsorption isostere)。

这三种吸附曲线是相互联系的, 一般实验测定的是等温吸附线, 由它再画出相应地等压吸附线与等量吸附线。其中最常用的还是等温吸附线。

随着对各类吸附现象实验数据的积累, 现在已总结出如图 6-2 所示的五类等温吸附线<sup>[1,2]</sup>。图 6-2 中横坐标为相对压力  $p/p_s$ ,  $p_s$  代表在该温度下吸附质的饱和气压,  $p$  是吸附平衡时的吸附质的气压。若吸附质是过热水蒸气, 则  $p$  为  $p_v$ ,  $p_s$  为  $p_{sv}$ 。纵坐标为吸附量  $Q$ 。

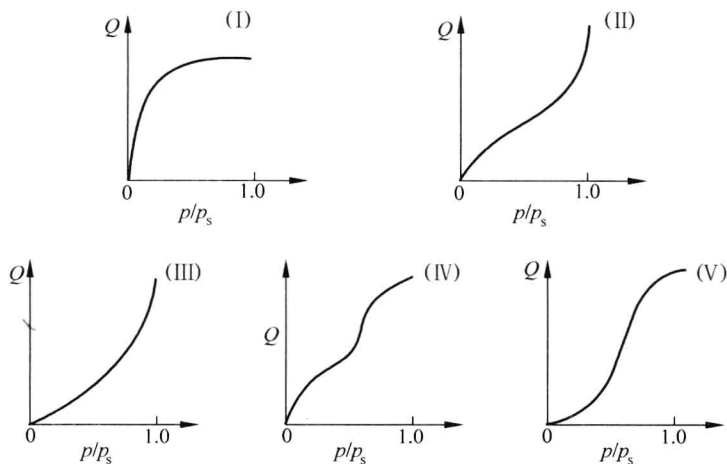


图 6-2 五种类型等温吸附线



下面列举几种实际等温吸附线。

用活性炭纤维(ACF)吸附有机废气是当今环保工程中最为先进技术之一。ACF是具有比表面积大、孔径分布窄等优点的一种理想的多孔吸附材料。它由有机纤维经高温碳化活化制备而成,其等温吸附线如图 6-3 所示<sup>[3]</sup>。图中横坐标是被吸附气体的浓度,纵坐标是相对质量。图中离散的点是实验结果,光滑曲线是按朗缪尔(Langmuir)模型计算的结果。

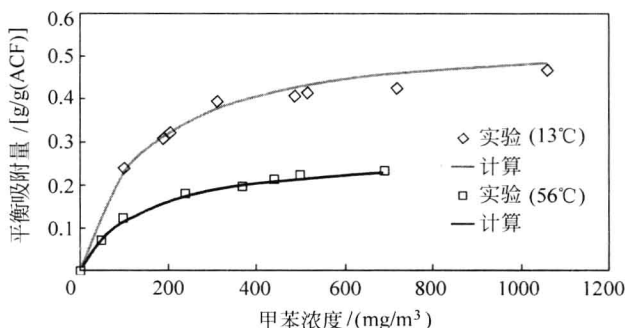


图 6-3 ACF 对甲苯废气的等温吸附线

图 6-4 是茶叶对水蒸气的等温吸附线<sup>[4]</sup>。图中离散的点是实验的结果,光滑曲线是根据实验点拟合的。图 6-5 是木材对水蒸气的等温吸附线<sup>[5,6]</sup>。图中光滑曲线是由辛普森(Simpson)模型<sup>[7]</sup>根据实验结果得到的。图 6-4 与图 6-5 的横坐标相同,都为相对压力(相对湿度),纵坐标均为相对质量,即含水率。

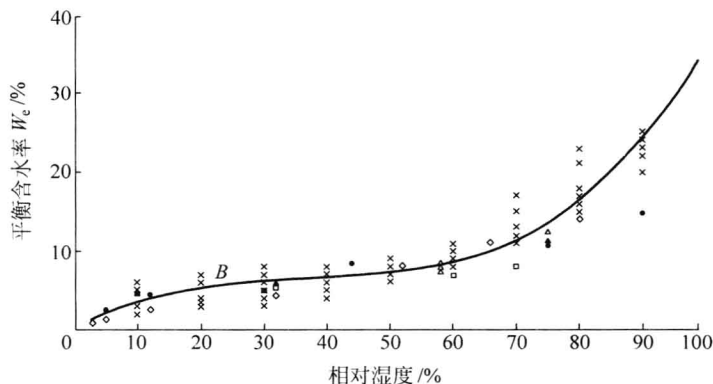


图 6-4 茶叶对水蒸气的等温吸附线

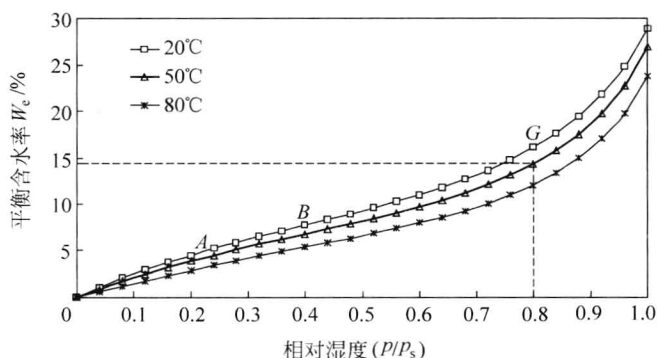


图 6-5 木材对水蒸气的等温吸附线

### 6.1.2 等温吸附线机理解释

实际上,固体表面同图 5-2 所示的液体表面一样,表面上原子或分子力场不均衡。固体表面也有表面张力与表面能,只是由于固体不具有流动性,不能像液体那样通过形成弯曲表面以降低表面能。然而,任何表面都有自发降低表面能的倾向。既然固体表面难以改变形状,则根据表面上的原子或分子力场不均衡性对碰到固体表面的气体分子产生吸引力,使气体分子在固体表面上发生相对聚集,以降低固体的表面能,这是固体表面具有吸附能力的根本原因,也是吸湿性多孔材料内吸着水存在的根本原因<sup>[1,2]</sup>。

#### 6.1.2.1 吸附的类型

按固体表面分子对被吸附气体分子作用力性质不同,将吸附现象区分为物理吸附与化学吸附两种类型。在物理吸附中,固体表面分子与气体分子之间的吸附力是范德瓦耳斯(van der Waals)引力,也即气体分子凝聚为液体的力,所以物理吸附类似于气体在固体表面上发生液化。在化学吸附中,固体表面分子与气体分子之间可以有电子的转移、原子的重排、化学键的破坏与形成等,吸附力远大于范德瓦耳斯力而与化学键力相似,所以化学吸附类似于发生化学反应。正是因为两种吸附力性质上的不同,导致物理吸附与化学吸附特征上的一系列差异,见表 6-1。

对于存在于多孔材料固相骨架内的水,常称吸着水。它是由多孔材料对水蒸气进行吸附而形成的。其中把由于化学吸附所形成的吸着水称结合水或化合水。

表 6-1 物理吸附与化学吸附的比较<sup>[2]</sup>

类 别	物 理 吸 附	化 学 吸 附
吸附力	范德瓦耳斯力	化学键力
吸附分子层	被吸附分子可形成单分子层,也可形成多分子层	被吸附分子只能形成单分子层
吸附选择性	无选择性,任何固体皆能吸附任何气体,易液化者易被吸附	有选择性,指定吸附剂只对某些气体有吸附作用
吸附热	较小,与气体凝聚热相近,约为 $2 \times 10^4 \sim 4 \times 10^4$ J/mol	较大,接近化学反应热,约为 $4 \times 10^4 \sim 4 \times 10^5$ J/mol
吸附速率	较快,受温度影响小,易达到平衡,易解吸	较慢,随温度升高加快,不易达到平衡,不易解吸

因此,有些文献<sup>[8]</sup>对多孔材料内含有的水分为三类,即自由水、吸着水与化合水。显然,在吸着水的解吸过程中,受物理吸附的吸着水易于解吸,它要克服的是物理吸附的吸附热。吸附热与热力学中水蒸气汽化潜热相接近。而对受化学吸附的化合水进行解吸就困难多了,因为它要克服的是化学吸附的吸附热。

#### 6.1.2.2 多孔材料等温吸附线机理定性解释

将图 6-3、图 6-4、图 6-5 与图 6-2 进行对比可发现,图 6-3 的曲线与图 6-2 中 I 型相似,这类曲线的特点是,函数随自变量增加单调上升而函数对自变量的一阶导数随自变量增加单调下降。图 6-4 和图 6-5 的曲线与图 6-2 中 II 型相似<sup>[9]</sup>。

下面以木材为例,根据图 6-5 曲线的特点,分析形成木材等温吸附线的机理。

将一块绝干(含水率为 0)的吸湿性多孔材料(木材)放置在温度一定、湿度一定的湿空气环境之中,此材料通过其外观与内在的表面对环境(既有包围材料的大环境又有多孔材料内部毛细管气相空间的小环境)中的水蒸气进行吸附,并在材料内部形成液相水。单位时间的吸附量称为吸附速率。在将环境中水蒸气进行吸附并凝聚为液相水的同时,已经凝聚成液相的水也可解吸成气相的水蒸气而重新回到环境中去。单位时间的解吸量称为解吸速率。当吸附速率等于解吸速率时,吸附与解吸达到动态平衡,多孔材料内的含水率不再变化,称为平衡含水率。在环境温度一定的条件下改变湿空气的水蒸气密度,即,改变相对湿度(从 0%~100%),可得到不同相对湿度条件下平衡含水率。这一相对湿度与平衡含水率的关系即为等温吸附线。改变环境温度即可得到不同温度条件下的一组等温吸附线。

图 6-4 与图 6-5 这类 II 型等温吸附线明显的特点之一是,曲线中存在拐点 B。在 B 点之前,平衡含水率随相对湿度增加而增加,而这种增加的速率,即平衡含水

率对相对湿度的一阶导数,随相对湿度增加单调地下降。这一特征与图 6-3 中 ACF 对甲苯废气的等温吸附线相似,反映了固体表面单层吸收的特征,表明在  $B$  点之前固体表面经历着单层吸附过程,或者说,在相对湿度从 0 到  $B$  点过程中,单层吸附起着主要作用。图 6-6 示意了这个过程。图中深色方块代表从细胞壁中切割出来的一个微小单元的剖面,如果固体表面面对真空环境,则表面上没有被吸附的气体,如图 6-6(a)。如果环境中有少量湿空气气体分子,即对应低的相对湿度,固体表面就会对环境中的湿空气分子进行吸附,同时也存在解吸,两者可达到平衡状态。由于环境中湿空气的密度低,吸附-解吸平衡时被吸附的气体是单层的且只能覆盖固体表面的部分面积,如图 6-6(b)所示,对应的平衡含水率也很低,在 3% 以下。当环境中的湿空气密度达到一定值时,单层吸附呈饱和状态,被吸附的气体分子覆盖的固体表面积达到极限。请注意,单层吸附达到饱和状态并不是被吸附的气体分子把固体表面全部覆盖起来,覆盖率的大小取决于被吸附气体的压力及固体表面对该气体的吸附能力。上述单层吸附饱和状态如图 6-6(c)所示,即到达图 6-5 中的  $A$  点,对应的相对湿度为 20%~25%,含水率约为 3%~5%。从  $A$  点到  $B$  点是从以单层吸附为主到以多层吸附为主的过渡过程。在这个过程中,平衡含水率对相对湿度的一阶导数还在下降,表明吸附能力随吸附量增加还在减小。

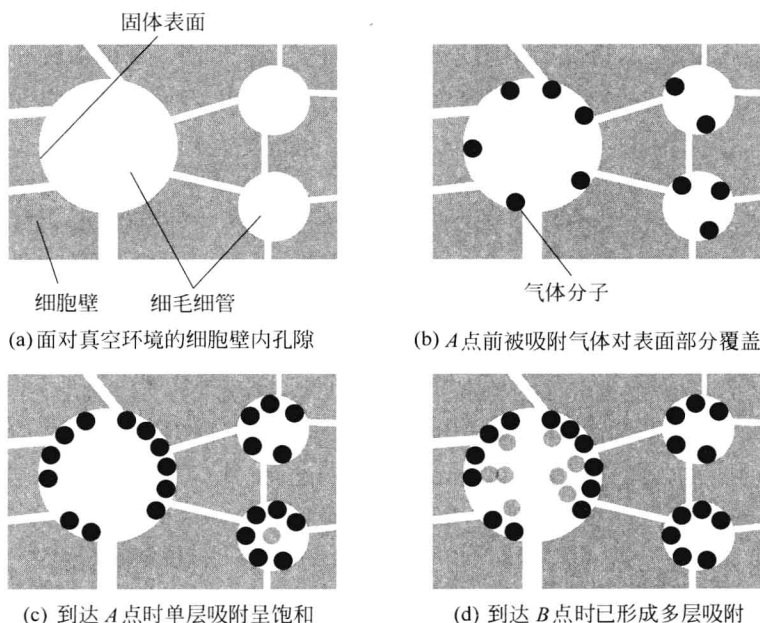


图 6-6  $B$  点前的吸附现象

单层吸附可以是物理吸附也可以是化学吸附,也可以两者兼有。其中化学吸附如木材学<sup>[8,10]</sup>中所说,是组成木材细胞壁的纤维素、半纤维素与木质素中游离的羟基(OH)与水蒸气中的氢(H)键的结合。这种结合力为化学键力,比物理吸附的范德瓦耳斯力大得多。据文献[9]报道,这部分化学吸附的水蒸气其中被纤维素、半纤维素与木质素单层吸附的比例分别为47%、37%与16%。

由化学作用形成的化合水难以解吸,甚至被认为是固体的一部分。单层吸附中的物理吸附,由于其对被吸附的吸附质没有选择性,则可对固体表面上的水蒸气与干空气同时进行吸附。由于水蒸气易液化,在被吸附时优先于干空气。而另一方面,就固体表面上被吸附的气体压力而言,由于常温常压环境下空气(湿空气)中干空气的容积密度远大于水蒸气容积密度,即干空气的分压远大于水蒸气分压,干空气应该对吸附有大的贡献。这样,在固体表面物理吸附部分,干空气密度对单层吸附中的物理吸附是有贡献的,干空气的存在会影响水蒸气的吸附量,也即影响等温吸附线。

在B点之后,固体表面上是多层吸附(单层吸附已饱和)。从第2层起,如表6-1所示,只有物理吸附,没有化学吸附,也即只有范德瓦耳斯力。

根据木材学<sup>[11]</sup>介绍,木材中的毛细管分成两类。一类是大毛细管系统,它由相互连通的细胞腔及细胞间隙构成,毛细管的直径在 $5\text{ }\mu\text{m}$ 以上;另一类是细毛细管系统,它由相互连通的细胞壁内的微毛细管构成,细毛细管的直径在 $0.05\text{ }\mu\text{m}$ ( $50\text{ nm}$ )以下。这一认识也可在图1-5中看到。对于直径约 $2\text{ nm}$ 细毛细管,在形成多层吸附时,如图6-7所示,很容易被直径为 $0.4\text{ nm}$ 的水分子填满,并出现如图6-8所示的毛细管现象,在细小毛细管内形成弯曲液面。或者说,在多层吸附中,固体表面被吸附的液相水所覆盖,即固相的表面被液相的水所替代。液相水表面具有易弯曲的性能,以此来降低表面能。这就是说,当固相表面被液相水覆盖后,固相表面的吸附能力已经丧失。

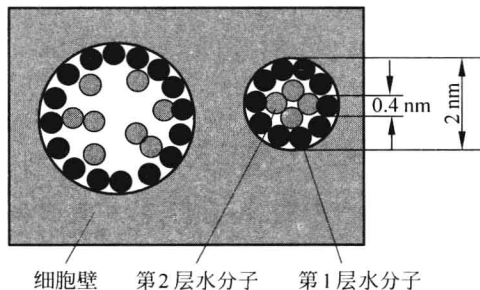


图6-7 B点之后的多层吸附

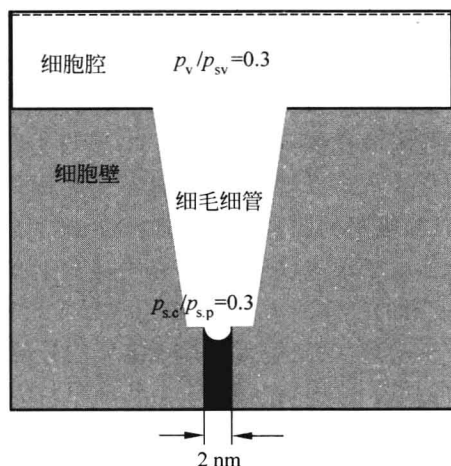


图 6-8 固体表面的多层吸附逐渐形成毛细管现象

存在于毛细管内弯曲液面上饱和水蒸气压力与毛细管半径的关系由开尔文方程式(5-1-15)表示,并在表 5-2 和表 5-3 中列举数据。按照表 5-2 和表 5-3 所列数据,对半径在  $5\text{ }\mu\text{m}$  以上的毛细管,其中弯曲液面的饱和水蒸气压力  $p_{s,c}$  几乎等同于平面液面的饱和水蒸气压力  $p_{s,p}$ ,即等同于毛细管内湿空气环境的饱和蒸气压  $p_{sv}$ 。这样,只要环境湿空气未达到饱和状态,例如,环境相对湿度  $p_v/p_{sv} = 0.3$ ,存在于细胞腔内的水就可以自由地蒸发,直至全部蒸发完。这部分贮存在大毛细管中的水就是自由水。而当直径约为  $2\text{ nm}$  细毛细管中充满着液相水时,其弯曲液面的水蒸气饱和压力与对应温度下平面液面的水蒸气饱和压力之比约为  $p_{s,c}/p_{s,p} \approx 0.3$ (见表 5-3)。这样,在相对湿度为  $p_v/p_{sv} = 0.3$  的环境中,环境中水蒸气压力  $p_v$  等于弯曲液面上饱和水蒸气压力  $p_{s,c}$ ,相应地,环境中水蒸气密度等于弯曲液面上饱和水蒸气密度,则毛细管内液相水不可能自由地被蒸发,或者说,将处于相平衡状态(固体表面对水蒸气吸附处于平衡状态)。这部分贮存在小毛细管中的水为吸着水。

如果增加环境湿空气的相对湿度至  $p_v/p_{sv} = 0.8$ ,原有弯曲液面的饱和水蒸气压力  $p_{s,c}$  将低于环境(细胞腔内)的水蒸气压力  $p_v$ ,相应地,原有弯曲液面的饱和水蒸气密度将低于环境的水蒸气密度,这种环境与液相表面水蒸气密度的差别将促使细胞腔内水蒸气向细胞壁内微毛细管中弯曲液面传输,如图 6-9(a)所示,使弯曲液面上水蒸气堆积并凝结成液相水。只要这种密度差别存在,弯曲液面上水蒸气凝结现象将继续进行下去,直至这种差别消失。这里,固体细胞壁对细胞腔内水

蒸气的吸附过程就成为在细胞壁内细毛细管中水蒸气在弯曲液面上凝结过程。当毛细管内不断地由水蒸气凝结成水使液相水有可能填充在直径较大的毛细管内,也就是,弯曲液面的曲率半径在增大,环境与弯曲液面上的水蒸气密度的差别在缩小。当这种密度差别逐渐缩小至消失后,凝结现象停止,吸附达到一个新的平衡状态,如图 6-9(b)所示。液相水弯曲液面就停留在毛细管内直径稍大的(10 nm)某一位置,且不再变化(见表 5-3,曲率半径为 5 nm 条件下,  $p_{s,c}/p_{s,p} \approx 0.8$ ),这意味着液相水的质量不再变化。这个质量就对应于平衡含水率,也即停留在图 6-5 中等温吸附线上 G 点。这个点对应在横坐标上是环境(也是细胞腔内的)湿空气的相对湿度  $p_v/p_{sv}=0.8$ ,这个水蒸气分压  $p_v$  正是细胞壁中细小毛细管内液相水弯曲液面上的饱和水蒸气压力  $p_{s,c}$ ,而对应温度下的水蒸气饱和压力  $p_{sv}$  正是环境中平面液体上饱和蒸气压  $p_{s,p}$ 。所以说,在 B 点之后,相对湿度,即水蒸气分压与对应温度下的水蒸气饱和压力之比  $p_v/p_{sv}$  正是毛细管弯曲液面与相应平面液面饱和蒸气压之比  $p_{s,c}/p_{s,p}$  [12],  $p_v/p_{sv} = p_{s,c}/p_{s,p}$ 。

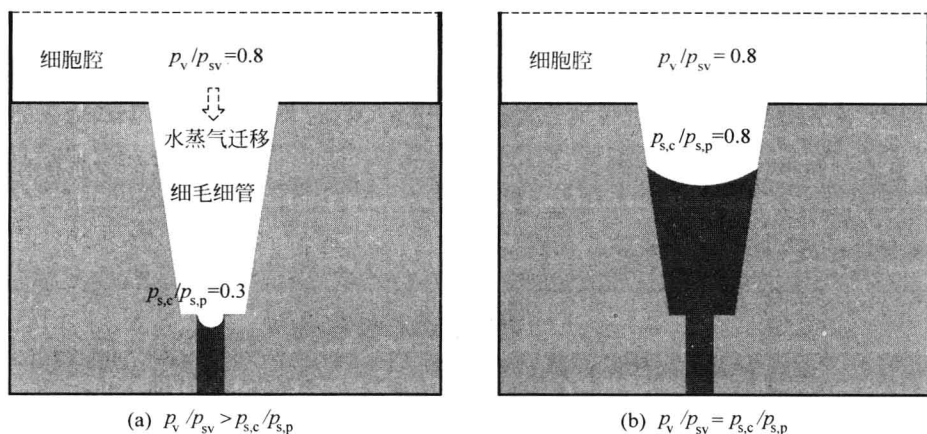


图 6-9 毛细管液面弯曲与环境相对湿度的关系

继续提高环境的相对湿度直至最大值 100%,相应地平衡含水率也达到最大值。这个平衡含水率最大值称为该温度下的纤维饱和点。

总之,从 B 点之后,毛细管现象逐渐呈现出来。随着环境相对湿度的升高,毛细管作用的吸着水逐渐增加,直至毛细管弯曲液面渐趋平坦,吸着水的含量达到纤维饱和点。

在木材学 [10] 中,针对木材中水分存在形式作了如下阐述:“木材中的水分,按其 与木材的结合形式,可分为化学水(构成水)、吸附水与毛细管水;毛细管水又分

为大毛细管水(自由水、胞腔水或游离水)与微毛细管水(毛细管凝结水)。若按水分在木材中存在的位置,可分为胞腔水与胞壁水;胞壁水又分为化学水、吸附水与微毛细管水。”

综述文献[8、10]与[11]关于木材中吸着水存在形式与本节讨论是一致的,只是这里对吸着水形成的过程作了更基础性量化的解释。

### 6.1.3 等温吸附线数学描述

将由实验得到的等温吸附线表示成数学形式,最好是解析的数学形式,这是定量分析含湿性多孔材料传热传质所必需的。这种在分析实验数据基础上所形成的数学形式也常被称为数学模型。下面由易及繁扼要介绍描述等温吸附线的几种模型。

#### 6.1.3.1 朗缪尔(Langmuir)单层吸附模型

朗缪尔在研究低压下气体在金属上吸附时,根据实验数据发现了一些规律,并总结出朗缪尔单分子层吸附理论,也称朗缪尔模型或单分子层吸附模型。这个模型的基本观点是气体在固体表面上的吸附乃是气体分子在吸附剂表面凝集和逃逸(即吸附与解吸)两种相反过程达到动态平衡的结果,也即,固体表面上的吸附速率 $\dot{V}_a$ (单位时间单位面积上吸附量)等于解吸速率 $\dot{V}_d$ (单位时间单位面积上解吸量),示意于图 6-10。

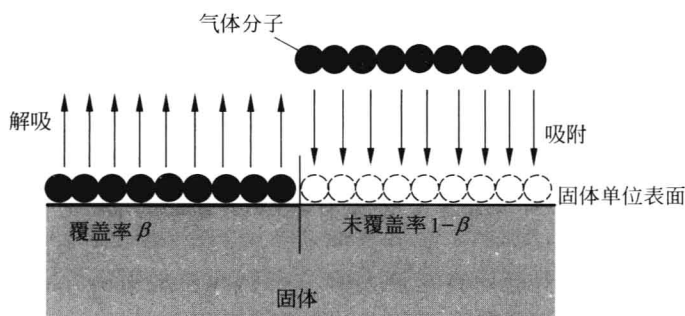


图 6-10 单分子层吸附模型

按图 6-10 的提示,吸附速率 $\dot{V}_a$ 可表示为

$$\dot{V}_a = c_a(1 - \beta)\varphi \quad (6-1-3)$$



式中,  $(1-\beta)$  表示单位面积上空白的面积, 也即未被气体分子碰撞的面积, 或称未覆盖率。显然, 只有碰撞到这个面积内的分子才能被吸附。式(6-1-3)显示了吸附速率  $\dot{V}_a$  与未覆盖率  $(1-\beta)$  成正比, 还与被吸附气体的相对压力  $\varphi$  成正比。  $\varphi = p/p_s$ ,  $p$  是被吸附气体的压力,  $p_s$  是被吸附气体的饱和压力。  $c_a$  是比例系数。

解吸速率  $\dot{V}_d$  正比于覆盖率  $\beta$ , 表示为

$$\dot{V}_d = c_d \beta \quad (6-1-4)$$

在动态平衡条件下, 吸附速率  $\dot{V}_a$  等于解吸速率  $\dot{V}_d$ , 也即

$$c_a(1-\beta)\varphi = c_d\beta \quad (6-1-5)$$

令  $c_a/c_d = \alpha$ , 式(6-1-5)经整理后可得

$$\beta = \frac{\alpha\varphi}{1+\alpha\varphi} \quad (6-1-6)$$

式中,  $\alpha$  是吸附作用的平衡常数, 也称吸附系数。  $\alpha$  值的大小代表了固体表面吸附气体能力的强弱程度, 它随温度和吸附热的变化而变化, 其关系式为

$$\alpha = \alpha_0 \exp\left(\frac{Q_h}{RT}\right) \quad (6-1-7)$$

式中,  $Q_h$  为吸附热, 放热吸附  $Q_h$  为正值, 吸热吸附  $Q_h$  为负值。对水蒸气的吸附为放热吸附。式中  $R$  为摩尔气体常数,  $\alpha_0$  是当  $Q_h = RT$  条件下的吸附系数。

式(6-1-6)表示了单分子吸附层中被吸附气体覆盖率  $\beta$  随被吸附气体压力  $\varphi$  变化而变化的规律。当  $\varphi$  值很小时,  $\beta$  随  $\varphi$  线性增长;  $\varphi$  值逐渐增大,  $\beta$  随  $\varphi$  增长速率放缓; 在  $\varphi$  趋近于 1 时,  $\beta$  趋于饱和值, 此值小于 1, 其大小与吸附系数  $\alpha$  有关,  $\alpha$  值越大,  $\beta$  值越接近 1。

对于放热吸附来说, 当温度上升时, 吸附系数降低, 吸附量相应减少。这一结论与图 6-3 与图 6-5 实验结果相符, 即, 随温度升高, 吸附线向下移动。

如果在同一表面上吸附 A、B 两种气体分子, 如湿空气中的水蒸气与干空气, 这种情形叫做混合吸附。对照式(6-1-6), 不难得到气体 A 与 B 的覆盖率  $\beta_A$  与  $\beta_B$  如下:

$$\beta_A = \frac{\alpha_A \varphi_A}{1 + \alpha_A \varphi_A + \alpha_B \varphi_B} \quad (6-1-8)$$

与

$$\beta_B = \frac{\alpha_B \varphi_B}{1 + \alpha_A \varphi_A + \alpha_B \varphi_B} \quad (6-1-9)$$

式中,  $\varphi_A = p_A/p_{As}$ ;  $\varphi_B = p_B/p_{Bs}$ ;  $p_A$  与  $p_B$  分别为气体 A 与 B 的压力;  $p_{As}$  与  $p_{Bs}$  分别为气体 A 与 B 的饱和压力;  $\alpha_A$  与  $\alpha_B$  分别为固体表面对气体 A 与 B 的吸附系数, 对照式(6-1-7), 可得

$$\alpha_A = \alpha_{A0} \exp\left(\frac{Q_{h,A}}{RT}\right) \quad (6-1-10)$$

与

$$\alpha_B = \alpha_{B0} \exp\left(\frac{Q_{h,B}}{RT}\right) \quad (6-1-11)$$

式中,  $Q_{h,A}$  与  $Q_{h,B}$  为气体 A 与 B 的吸附热。

以某固体表面对湿空气吸附为例, A 为干空气, B 为水蒸气, 如果该固体对 A 与 B 的吸附系数相接近, 而干空气的分压  $p_A$  远大于水蒸气分压  $p_B$ , 则覆盖率  $\beta_B$  远小于  $\beta_A$ 。如果该固体对 A 的吸附系数远小于 B, 这样, 尽管干空气的分压  $p_A$  远大于水蒸气分压  $p_B$ , 覆盖率  $\beta_B$  有可能大于  $\beta_A$ , 如图 6-11 所示, 图中横坐标是相对压力  $\varphi_A + \varphi_B$ 。

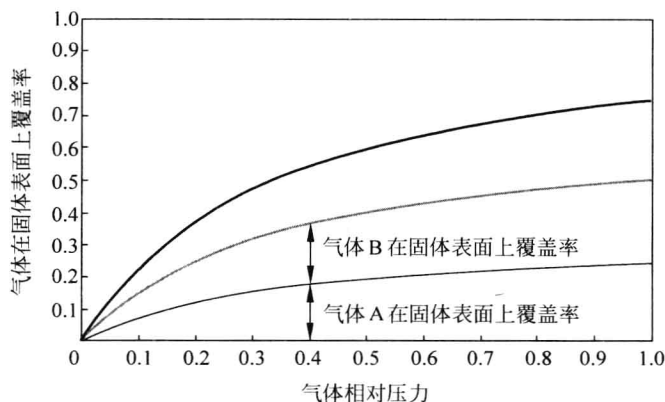


图 6-11 混合气体单层吸附的等温吸附线

### 6.1.3.2 BET 多层吸附模型

从实验测得的大量等温吸附线看, 大多数固体对气体的吸附并不是单分子层

的,尤其是物理吸附,基本上都是多分子层吸附。1938年,Brunauer,Emmett 和 Teller 三人在朗缪尔单分子层吸附理论的基础上,提出了多分子层吸附理论,简称 BET 吸附模型。

物理吸附中,不仅吸附剂对吸附质有引力,吸附质分子间也有引力,因此,气相中的分子碰撞到已被吸附的分子,也可被吸附,由此形成多分子层吸附。这一点改进了朗缪尔假设。

根据 BET 模型,在吸附达到平衡时,固体表面可能有一部分是空白的,而另一部分附着可能是  $i$  层分子,  $i=1,2,\dots,n$ 。设  $A_0, A_1, \dots, A_n$  分别表示被  $0, 1, 2, \dots, n$  层分子所覆盖的相对面积。如果将表面摊成平面,多层分子吸附示意于图 6-12。

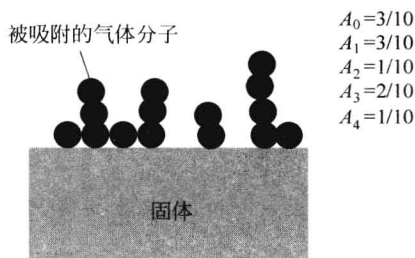


图 6-12 多分子层吸附示意图

为了与单层吸附进行对比,将式(6-1-6)改写成

$$\beta = \frac{V}{V_m} = \frac{M}{M_m} = \frac{\alpha\varphi}{1 + \alpha\varphi} \quad (6-1-12)$$

式中  $V_m$  与  $M_m$  为表面吸满单分子层时的吸附量,也可理解为固体表面层(厚度为分子直径)的体积与质量。式中  $V$  与  $M$  为实际吸附量。

根据 BET 模型,将式(6-1-12)推广到多层( $n$ 层)吸附,可得

$$\frac{V}{V_m} = \frac{M}{M_m} = \frac{\alpha\varphi[1 - (n+1)\varphi^n + n\varphi^{n+1}]}{(1 - \alpha\varphi)[1 + (\alpha - 1)\varphi - \alpha\varphi^{n+1}]} \quad (6-1-13)$$

式(6-1-13)的推导过程请参阅文献[1]。若  $n=1$ ,即单层吸附,式(6-1-13)退化为式(6-1-12)。

对于吸湿性多孔材料,在只含有吸着水条件下,式(6-1-13)中的  $M/M_m$  应正比于含水率,且对木材而言,式(6-1-13)中的吸附系数  $\alpha$  为  $6.3^{[13]}$ 。由此,在图 6-13 中显示了按式(6-1-13)在  $n=1,2,4,6,8,10,100$  条件下所计算得到的曲线以及从图 6-5 中节录下来的木材等温吸附线,并将两者进行对比。

从图 6-13 将实际等温吸附线与 BET 模型预测结果对比中看到,BET 模型在  $n=6$  条件下预测的结果与实际等温吸附线在相对湿度小于 70% 的范围内相互比较接近,具体地说,BET 模型在  $n>4$  条件下预测的结果与实际等温吸附线在相对湿度小于 40% 的范围内相当吻合。总之,用 BET 模型可以预测相对湿度不是很高的区域内的等温吸附线。

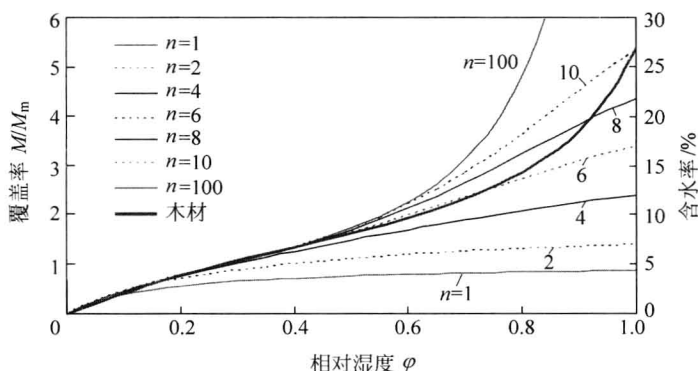


图 6-13 BET 模型与等温吸附线

### 6.1.3.3 其他模型

从图 6-13 看到,运用 BET 多层吸附模型,对于 II 型等温吸附线高相对湿度区域难以给出合理的预测结果。其基本原因是,在高相对湿度条件下,吸湿性多孔材料有能力包含更多的水分(吸着水),而固体表面的吸附能力随着吸附量的增加是减弱的,也即等温吸附线上一阶导数单调下降,当一阶导数由下降而变为上升(经过 II 型等温吸附线的 B 点),表明其他非固体表面吸附机理成为高相对湿度条件下多孔材料吸着水形成的支配因素。例如,在 Haillwood-Horrobin 模型<sup>[13,14]</sup>中认为,多孔材料内的吸着水一部分是吸附所致的结合水,另一部分则是固体溶液。而在文献[10]与[15]中更明确表示,是毛细管凝结现象所致。

就多孔材料传热传质分析而言,其关注点是,把用实验测得的等温吸附线如何给出恰当的数学描述。针对这一任务,在不同业务领域内,针对不同多孔材料已经提出大量实用数学描述(也称数学模型),这里仅举几例予以说明。

对于木材,应用得比较广泛的是 Simpson 模型<sup>[7]</sup>。它是根据 Haillwood-Horrobin 模型修正得到,表示为

$$W_e = \frac{1800}{A} \left( \frac{K\varphi}{1-K\varphi} + \frac{K_1 K \varphi + 2K_1 K_2 K^2 \varphi^2}{1 + K_1 K \varphi + K_1 K_2 K^2 \varphi^2} \right) \quad (6-1-14)$$

式中, $\varphi$ 为相对湿度; $W_e$ 为平衡含水率,均用小数表示。

$$A = 349 + 1.29t + 0.0135t^2$$

$$K = 0.805 + 0.000\,736 - 0.000\,002\,73t^2$$

$$K_1 = 6.27 - 0.00938t - 0.000303t^2$$

$$K_2 = 1.91 + 0.0407t - 0.000293t^2$$

式(6-1-14)适用范围为  $0^\circ\text{C} < t < 65^\circ\text{C}$ 。

对于高温条件下的木材等温吸附线可参阅文献[9],其数学表示形式为

$$W_e = at + b \quad (6-1-15)$$

式中,  $W_e(\%)$  为平衡含水率;  $t$  为环境温度;  $a$  与  $b$  是不同相对湿度条件下由实验得到的常数,列表如下:

表 6-2 式(6-1-15)中常数  $a$  与  $b$

相对湿度 $\varphi/\%$	常数 $a$	常数 $b$	相对湿度 $\varphi/\%$	常数 $a$	常数 $b$
20	-0.0232	4.957	80	-0.0572	16.584
40	-0.0350	8.095	100	-0.0934	25.93
60	-0.0447	11.542			

关于木材的等温吸附线还有更多更紧凑的数学表示式,详见文献[16,17]。

对于作为吸湿性多孔材(物)料的很多农产品,也有各自的等温吸附线<sup>[18]</sup>。例如,

$$W_e = \left[ \frac{-\ln(1-\varphi)}{C(t+C_1)} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (6-1-16)$$

式中,  $t$  为环境温度( $^\circ\text{C}$ );  $\varphi$  与  $W_e$  分别为相对湿度与平衡含水率,均用小数表示。对于稻谷:  $C=1.9187$ ,  $C_1=51.161$ ,  $n=2.4451$ ; 对于玉米:  $C=8.6541$ ,  $C_1=49.81$ ,  $n=1.8634$ 。

## 6.2 吸着水迁移机理及数学描述

6.1 节着重讨论吸着水存在形式及热力学状态处于平衡条件下当地含水率与对应的环境相对湿度的关系,本节将介绍在热力学状态处于非平衡条件下,或者说,处在从一个平衡状态向另一个平衡状态过渡过程中,当地含水率的迁移机理及相应地数学描述。

### 6.2.1 吸着水迁移的物理解释

这里仍以木材或类似于木材细胞为例,说明两个邻近的细胞从一个平衡状态

向另一个平衡状态过渡过程中吸着水迁移的行为。

图 6-14(a)为热力学状态处于平衡条件下含有自由水的 A 与 B 两个邻近细胞,它们各项热物理参数均相同。温度  $t_A = t_B$ , 含水率  $W_A = W_B$ , 水蒸气分压  $p_{v,A} = p_{v,B}$ , 水蒸气密度  $\rho_{v,A} = \rho_{v,B}$  等。两个细胞之间没有任何质量与热量交换。在每个细胞腔内,液相水与水蒸气处于相平衡状态,细胞腔内水蒸气为饱和蒸气,多孔材料所处环境的湿空气为饱和湿空气,换言之,环境湿空气的相对湿度为 100%。

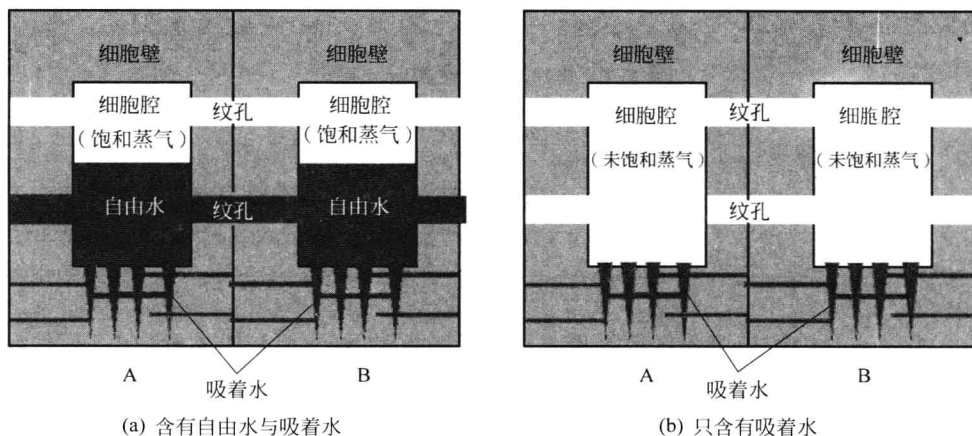


图 6-14 A、B 两个邻近细胞处于平衡状态

图 6-14(b)为热力学状态处于平衡条件下含有吸着水的 A 与 B 两个邻近细胞,它们各项热物理参数均相同。温度  $t_A = t_B$ , 含水率  $W_A = W_B$ , 水蒸气分压  $p_{v,A} = p_{v,B}$ , 水蒸气密度  $\rho_{v,A} = \rho_{v,B}$  等。两个细胞之间没有任何质量与热量交换。在每个细胞腔内,贮存于细胞壁内的液相水与停留在细胞腔内的水蒸气处于相平衡状态,细胞腔内水蒸气为未饱和水蒸气(也称过热水蒸气),多孔材料所处环境为未饱和湿空气,换言之,湿空气的相对湿度小于 100%。在此相平衡条件下,细胞腔内未饱和水蒸气的密度(或分压)等于贮存于细胞壁内微小毛细管中液相水弯曲液面上饱和水蒸气密度(或分压)。如果吸着水含量很少,即吸着水为化学吸附的结合水,毛细管现象不复存在,化学结合水与环境的相平衡则是化学反应平衡。

如果图 6-14(b)所示的 A、B 两个邻近细胞中,细胞 A 的含水率突然下降,如图 6-15 所示,使 A 与 B 之间失去平衡而处于非平衡状态,两个细胞的各项热物理参数发生怎样的变化呢? 下面先讨论等温条件下的吸着水的迁移,即 A 与 B 之间没有温度差别,没有热量传递,只有质量的迁移。而后讨论非等温条件下的吸着水的迁移。

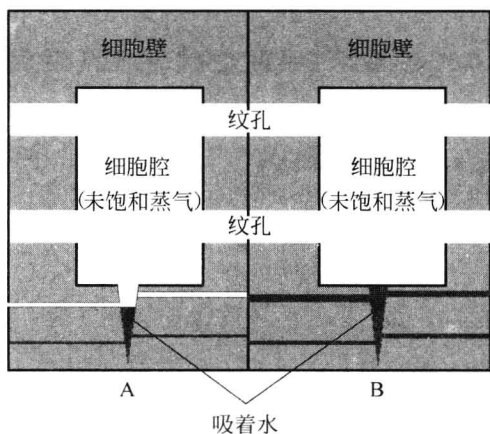


图 6-15 A、B 两个邻近细胞处于非平衡状态

### 6.2.1.1 等温条件下的吸着水迁移

当细胞 A 的含水率突然下降后,细胞 B 内吸着水的含水率就高于细胞 A 的含水率。或者说,细胞 B 内吸着水所在的毛细管直径大于细胞 A 内吸着水所在的毛细管直径,图 6-15 示意了这一特征。与此同时,细胞 A 内液相水与蒸气的相平衡也被破坏。对照图 6-9(b),当处在毛细管液相水的高度突然下降后,弯曲液面的曲率半径变小,弯曲液面上饱和水蒸气压力与密度变小(见表 5-2)。由此将引起细胞腔内水蒸气向弯曲液面处迁移,或者说,在弯曲液面上引起水蒸气的凝结。根据局部热平衡的假定,即液相水与气相始终保持相平衡,上述水蒸气凝结在瞬间完成。这样,在 A 与 B 之间,除了  $W_A < W_B$ ,同时有  $p_{v,A} < p_{v,B}$  与  $\rho_{v,A} < \rho_{v,B}$ 。

针对上述这种不平衡状况,根据图 5-9 与图 5-10 的提示,处在毛细管内的水将发生由宽端向窄端迁移,即处在较大直径毛细管内的液相水向处在较小直径毛细管处迁移,也即,由较高含水率处向较低含水率处迁移。这种液相水迁移的驱动力是处在直径不同毛细管间的压力差(或称毛细管力梯度)。就其表现形式,如 5.2.3 节所讨论的,为液相水由高含水率处向低含水率处的扩散。同时, B 与 A 之间由于水蒸气密度的差别而引起水蒸气的质量扩散。

总之,当细胞 A 的含水率突然下降后,细胞 A 内水蒸气密度也突然下降,以达液-气相平衡。此后,一方面,引起细胞 B 内吸着水与水蒸气向细胞 A 进行扩散,另一方面,在 A 与 B 细胞内有水蒸气蒸发与凝结。上述液相水、水蒸气的扩散与

水蒸气的凝结、液相水蒸发过程一直进行到达到新的平衡状态,使 A 与 B 的各项热物理参数均相同。

在含水率很低的条件下,液相水不再具有扩散能力,吸着水的迁移则是通过在当地的液相水就地蒸发或凝结以及水蒸气的迁移来实现。

### 6.2.1.2 非等温条件下的吸着水迁移

这里的非等温条件是指,当图 6-15 所示细胞 A 的含水率突然下降的同时,其温度突然升高,使 A 与 B 之间有温度的差别。

显然,这里讨论的非平衡态除了上述质量迁移外同时存在热量迁移。当细胞 A 的温度突然升高后,  $t_A > t_B$ , 将以导热的方式将热量由 A 迁移到 B。与此同时,对于液相水而言,由于  $W_A < W_B$ , 液相水由 B 扩散到 A,相应地,有热量由 B 迁移到 A。对细胞 A 的细胞腔内水蒸气而言,一方面,由于  $W_A$  突然下降而使  $\rho_{v,A}$  突然下降;另一方面,由于  $t_A$  的突然上升,有导致水蒸气分压上升的趋势。如果  $p_{v,A} > p_{v,B}$ , 在压力差驱动下,水蒸气由 A 迁移到 B,这种质量迁移是等温条件下不具有的。当然,随质量由 A 迁移到 B 的同时也有热量由 A 迁移到 B。水蒸气的质量迁移也会影响到 A 与 B 内水蒸气的凝结与蒸发。

总之,在非等温条件下两相邻细胞间的质量与热量迁移呈现更为复杂的情形,详尽地描述有赖于数学表示。

### 6.2.2 吸着水迁移的数学描述

本节的任务是将 6.2.1 节所阐述的吸着水迁移的物理过程用数学的形式表示出来。

在数学描述前,有必要对材料结构及吸着水存在形式作进一步说明,并给出若干假定。模型化后的含吸着水多孔材料由固相的细胞壁与细胞腔孔隙组成,孔隙内只含湿空气,吸着水存在于固相的细胞壁内。在热力学状态处于平衡条件下,任意两相邻细胞间不存在质量与热量迁移,材料与包围它的环境也不存在质量与热量迁移。在非等温条件下,两相邻细胞间存在质量与热量迁移,材料与包围它的环境之间也存在质量与热量迁移。这一节只给出材料内两相邻细胞间吸着水迁移行为的数学描述,不涉及材料内部与环境的质量和热量的传输。或者说,只讨论吸着水迁移的控制方程,不讨论定解条件。

控制方程的建立基于支配这些物理现象的本构关系及守恒原则等普遍规律,在此基础上将物理现象表示成数学形式。



含在固相细胞壁内的液相吸着水根据液相水质量守恒原则可得

$$\rho_d \frac{\partial W}{\partial \tau} = \rho_d \nabla \cdot D_{ls} \nabla W - \dot{m}_v \quad (6-2-1)$$

式(6-2-1)的含义是,含吸着水多孔材料内任意一处单位时间单位体积内吸着水质量的增加等于从该点邻近由于吸着水的扩散在单位时间内到达该处单位体积的质量扣除由于液相水的蒸发在单位时间单位体积内而减少的质量。

在含水率  $W$  很低的条件下,液相水扩散不复存在,上述方程可简化为

$$\rho_d \frac{\partial W}{\partial \tau} = -\dot{m}_v \quad (6-2-2)$$

式(6-2-1)与式(6-2-2)是含水率  $W$  的控制方程。

含在细胞腔内的湿空气是干空气与水蒸气的混合气体。它的密度  $\rho_g$  是干空气密度  $\rho_a$  与水蒸气密度  $\rho_v$  之和,它的压力  $p_g$  是干空气压力  $p_a$  与水蒸气压力  $p_v$  的和,表示为

$$\rho_g = \rho_a + \rho_v \quad (6-2-3)$$

与

$$p_g = p_a + p_v \quad (6-2-4)$$

式(6-2-3)与式(6-2-4)是混合气体密度  $\rho_g$  与压力  $p_g$  的控制方程。

由于干空气与水蒸气都满足理想气体状态方程,即

$$p_a = \rho_a RT / M_a \quad (6-2-5)$$

与

$$\rho_v = p_v M_v / RT \quad (6-2-6)$$

式(6-2-5)与式(6-2-6)是干空气压力  $p_a$  与水蒸气密度  $\rho_v$  的控制方程。

根据气相质量守恒原则,对干空气可得

$$\phi \frac{\partial \rho_a}{\partial \tau} = -\nabla \cdot \rho_a \mathbf{v} \quad (6-2-7)$$

式(6-2-7)的含义是,含吸着水多孔材料内任意一处单位时间单位体积内干空气质量增加等于从该处邻近由于气体的流动在单位时间内到达该处单位体积内的质量。式(6-2-7)是干空气密度  $\rho_a$  的控制方程。

对水蒸气可得

$$\phi \frac{\partial \rho_v}{\partial \tau} = -\nabla \cdot \rho_v \mathbf{v} + \dot{m}_v \quad (6-2-8)$$

式(6-2-8)的含义是,含吸着水多孔材料内任意一处单位时间单位体积内水蒸气质量的增加等于从该处邻近由于水蒸气的流动在单位时间内到达该处单位体积的质量加上由于液相水在单位时间单位体积内蒸发成气相的水蒸气而得到的质量。

将式(6-2-8)改写为

$$\dot{m}_v = \phi \frac{\partial \rho_v}{\partial \tau} + \nabla \cdot \rho_v \mathbf{v} \quad (6-2-9)$$

式(6-2-9)的含义是,含吸着水多孔材料内任意一点单位时间单位体积内由液相水转变成水蒸气的质量等于单位时间单位体积内水蒸气质量的增加与从该点向邻近由于水蒸气的流动而散失的质量之和。式(6-2-9)是体积蒸发率 $\dot{m}_v$ 的控制方程。

式(6-2-7)与式(6-2-8)中的 $\mathbf{v}$ 是气体流动速度,由达西定律表示为

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\eta} \nabla p_g \quad (6-2-10)$$

显然,式(6-2-10)是气体流动速度 $\mathbf{v}$ 的控制方程。

根据非等温条件下仍保持局部热平衡的假定,即吸湿性多孔材料内各处传热传质过程中始终保持相平衡,也即,遵循如式(6-1-14)、式(6-1-15)与式(6-1-16)所示的等温吸附线方程,这里表示为各处的含水率 $W$ 是当地相对湿度 $\varphi$ 与温度 $t$ 的函数,写作

$$W = f(\varphi, t) \quad (6-2-11)$$

当然,式(6-2-11)也可改写为

$$\varphi = f^*(W, t) \quad (6-2-12)$$

式(6-2-11)中相对湿度 $\varphi$ 的定义如式(3-1-4)所示, $\varphi = p_v / p_{sv}$ ,其中饱和水蒸气压力 $p_{sv}$ 唯一取决于温度 $t$ 。这样,式(6-2-11)及式(6-2-12)的含义为,吸湿性多孔材料内各处的含水率与当地水蒸气压力 $p_v$ 及温度 $t$ 相对应,或者说,各处水蒸气压力 $p_v$ 与当地的含水率 $W$ 及温度 $t$ 相对应。这样,式(6-2-12)就是水蒸气压力 $p_v$ 的控制方程。

根据能量守恒原则,参照式(5-4-13)的推导过程,可得

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla \cdot \lambda \nabla t + D_{ls} \nabla W \cdot \nabla t - \rho_g c_g \mathbf{v} \cdot \nabla t - \dot{m}_v \gamma \quad (6-2-13)$$

式(6-2-13)的含义是,含吸着水多孔材料内任意一处单位时间单位体积内物质能

量的增加等于从该处邻近由于热传导单位时间内到达该处单位体积的能量加上由于液相水扩散及气体流动到达该处的能量扣除由于液相水的蒸发而减少的能量。式(6-2-13)是多孔材料温度  $t$  的控制方程。

综上所述,由式(6-2-1)~式(6-2-13)共 13 个方程中,针对不同条件,应用其中 10 个有效方程,并引出 10 个因变量,它们是:含水率  $W$ 、温度  $t$ 、气体速度  $v$ 、体积蒸发率  $\dot{m}_v$  及气体的密度  $\rho_a$ 、 $\rho_v$  和  $\rho_g$  与压力  $p_a$ 、 $p_v$  和  $p_g$ 。这 10 个因变量是相互耦合的,示意于图 6-16 中。

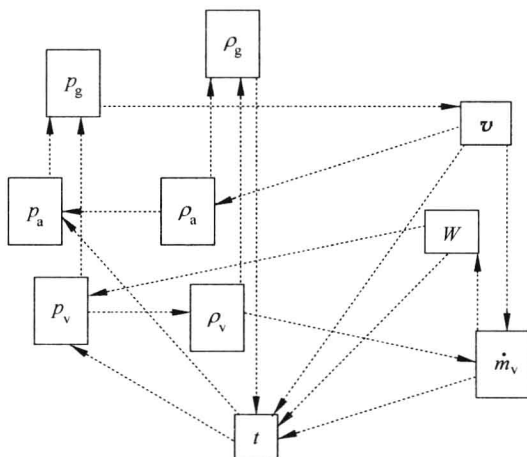


图 6-16 10 个因变量的耦合关系

### 6.3 吸湿性多孔材料干燥原理及数值分析

吸湿性多孔材料包括天然生物材料中大多数纤维性植物及动物骨骼,当然也包括由这些材料构成的人造材料,如木材人造板、谷物食品等。材料中含有吸着水是这类多孔材料共同的特点,也是研究该类材料传热传质过程需要特别关注的。

干燥,往往是这类材料加工生产过程中重要环节。改进干燥工艺不仅对提高产品的生产率及改善产品质量起着重要的作用,对节省能耗及保护环境也有十分重要的意义。同时,干燥过程比较完整地反映了吸湿性多孔材料传热传质的基本特征。本节结合如图 6-1 所示以热空气流作为干燥介质对吸湿性多孔材料进行对流加热这一特定条件,介绍锯木木材干燥过程的基本原理及数值分析。该基本原理及数值分析方法的重点是分析材料中的水分是怎样从材料内部迁移到环境中去

的。作为基本原理的分析结果不可能也不应该与实际生产过程中极为复杂条件下得到的结果进行直接对比,但是,在认识基本原理及掌握数值分析方法基础上,针对不同具体条件(如不同干燥对象、不同干燥设备、不同干燥环境、不同干燥方法等)适当加以修正后应该可以获得更接近生产实际的结果。

为了对干燥过程进行数学描述,必须先建立物理模型。

### 6.3.1 物理模型

如前所述,物理模型通常包括过程定性分析及若干简化假定两个部分。关于多孔材料受热过程的定性分析在 5.3.1 节中已有介绍,这里不再重复。作为含水吸湿性多孔材料与前两章讨论的多孔材料的最大区别表现在材料结构方面,因此,物理模型中更关注材料结构的模型化,它们体现在如下各假定中。对实际过程及材料结构引入简化假定时,既要注意引入的假定尽可能接近实际,又要注意在引入假定后便于建立数学模型。

假定 1,把实际复杂的木材结构(由许多不同形态和不同功能的细胞所组成)视为由大小毛细管组成的一个网络系统。以软木针叶材为例,参照图 1-4 与图 1-5,把细胞的胞管视为毛细管,细胞腔及胞管间孔隙视为毛细管内空穴。由细胞胞管组成的这个网络系统为大毛细管系统。大毛细管之间通过存在于胞管壁上的纹孔相互联通。这样,整个多孔材料内固相骨架是连通的,孔隙也是连通的。

假定 2,由于大毛细管的直径大都在  $5\text{ }\mu\text{m}$  以上,参见表 5-2 所列数据可知,存在于大毛细管内的液相水为自由水,其中液相水与气相水蒸气始终保持着相平衡,大毛细管内水蒸气始终处在饱和状态,也即,具有细胞温度对应下的饱和水蒸气密度与饱和水蒸气压力。

假定 3,自由水迁移的驱动力是毛细管间毛细管力的差,迁移形式是液相水渗流,但在数学表述上,自由水迁移的驱动力表示为含水率的梯度,迁移形式是液相水扩散。在自由水存在的区域内,由于温度梯度很小,相应地水蒸气密度梯度也很小,为此,水蒸气的扩散予以忽略。

假定 4,细胞壁内含有微毛细管,由微毛细管组成的这个网络系统为微毛细管系统。由于微毛细管的直径大都在  $50\text{ nm}$  以下,参见表 5-3 所列数据可知,存在于微毛细管内的液相水为吸着水,其中液相水与气相水蒸气始终保持着相平衡。也即,微毛细管内水蒸气密度与水蒸气压力始终等于当地弯曲液面上的饱和水蒸气密度与水蒸气压力,同时与材料的含水率(平衡含水率)相对应。

假定 5,吸着水的迁移既有液相水的扩散又有伴随相变而引起的水蒸气的迁移。水蒸气的迁移可认为由于水蒸气压力梯度驱动的渗流,也可认为由于水蒸气密度梯度驱动的扩散。

假定 6, 根据上述大毛细管网络与微毛细管网络这一特点, 对吸湿性多孔材料内的孔隙与固相骨架应有新的认识, 这里的孔隙率  $\phi$  不仅包括大毛细管网络中细胞腔的孔隙, 还包括微毛细管网络细胞壁内微孔隙。相应地, 固相骨架则是材料内扣除孔隙的部分。

假定 7, 尽管实际木材在干燥过程中由于吸着水的迁出使木材产生干缩现象, 即固相骨架缩小, 但为了便于分析, 还是假定固相骨架是刚性的。

假定 8, 在 5.5 节对非吸湿性多孔材料干燥过程分析中, 存在  $S=S_{l,c}$  的界面, 并以此界面将材料划分成  $S<S_{l,c}$  的干区与  $S\geq S_{l,c}$  的湿区, 以及  $S=S_{l,c}$  的界面由平板材料表面移动到平板的底部(其实是整个材料的中心面)。上述认识在本节中仍然适用, 在既有自由水又有吸着水的木材中, 作为自由水与吸着水的分界线, 即纤维饱和点, 显然是一种临界值, 以此来构成界面。由此, 将液相水饱和度  $S$  改为含水率  $W$  后, 将临界饱和度  $S_{l,c}$  改为纤维饱和点  $W_{fsp}$ , 且  $W<W_{fsp}$  为干区, 此区内的水蒸气为当地温度下的未饱和水蒸气(过热水蒸气),  $W\geq W_{fsp}$  为湿区, 此区内的水蒸气为当地温度下的饱和水蒸气。上述饱和度  $S$  与含水率  $W$  有各自的定义, 它们在 1.1.3 节中已有介绍。严格地讲, 在自由水存在区域内, 仍存在对应于临界饱和度的含水率, 其值略大于纤维饱和点。这样, 材料在干燥过程中, 其内部就存在两个界面。为了使问题得以适当的简化, 将两个界面合二为一, 即以  $W=W_{fsp}$  作为材料干、湿两区的分界面。

假定 9, 由于材料内部的空气含量很少, 在干燥过程中其影响也很小, 故忽略材料内空气的存在(在讨论空气相对湿度时除外), 不计空气质量的迁移。

在对材料及材料内过程引入上述若干假定后, 对环境条件也需引入若干假定, 这些假定同样是物理模型的一部分。

假定 10, 环境条件是稳定的, 也即, 环境空气流的温度、湿度与速度为常数, 它们不随时间而变化。

假定 11, 由于一般被干燥锯木的厚度相对于长度要小得多, 在干燥炉内锯木成排布置, 使炉内热空气流主要从锯木的上、下表面呈对称流过。因此, 作为模型化, 表示成如图 6-1 所示把一块厚度为  $2H$  的材料变成一块厚度为  $H$  的材料, 且除上表面之外, 底部与侧面都为绝热壁面, 使材料内部的传热传质过程被简化成沿厚度方向的一维过程。

假定 12, 在材料表面与环境间的对流传热传质过程中, 当表面处的含水率高于纤维饱和点时, 自由水浸润着材料的整个表面, 假定其传热传质规律如同第 3 章中介绍的自由水表面的加热与蒸发, 环境对材料表面加热的驱动力是环境温度与材料表面温度的差值, 材料表面对环境的传质驱动力则是材料表面自由水在表面温度下的饱和水蒸气密度与环境湿空气中水蒸气密度的差值。当表面处的含水率

低于纤维饱和点时,环境对材料表面加热的驱动力仍然是环境温度与材料表面温度的差值,材料表面对环境的传质驱动力应该说仍然是材料表面处的水蒸气密度与环境湿空气中水蒸气密度的差值,然而,在含水率低于纤维饱和点条件下,材料表面的水是吸着水,材料表面水蒸气密度不仅与温度有关,更有赖于当地的含水率。另外,环境的水蒸气密度与材料干燥的终极含水率相对应,即与材料最终达到的平衡含水率  $W_e$  相对应。因此,在物理模型中,在材料表面含水率低于纤维饱和点条件下,假定材料表面对环境的传质驱动力是表面处的含水率  $W_s$ 。与对应于环境条件下的木材平衡含水率  $W_e$  两者之间的差值。

上述各项假定的更详尽解释已在 5.1 节、5.2 节、6.1 节与 6.2 节中有所介绍。

### 6.3.2 数学模型

本节在 6.2.2 节基础上介绍相应地控制方程及定解条件。

#### 6.3.2.1 液相水质量守恒

在  $W \geq W_{fsp}$  区域,根据物理模型中假定 3,与式(5-5-1)相仿,经整理可写为

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = D_{ls} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \quad (6-3-1)$$

在  $W < W_{fsp}$  区域,根据物理模型中假定 5,可写为

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = D_{ls} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\dot{m}_v}{\rho_d} \quad (6-3-2)$$

式(6-3-1)与式(6-3-2)是含水率  $W$  在  $W \geq W_{fsp}$  与  $W < W_{fsp}$  两个区域内的控制方程。式(6-3-1)表示在大毛细管网络系统中,水分的迁移只是液相水(自由水)扩散,忽略了水蒸气的迁移;而(6-3-2)表示在微毛细管网络系统中,水分的迁移除了液相水(吸着水)扩散,还有水蒸气的迁移。与式(6-3-1)相比,式(6-3-2)中增加了一项  $-\dot{m}_v/\rho_d$ 。式(6-3-2)是式(6-2-1)的一维形式。

在  $W = W_{fsp}$  界面上的质量守恒表示在 6.3.2.5 节的式(6-3-15)中。

#### 6.3.2.2 水蒸气质量守恒

如下水蒸气质量守恒方程只对  $W < W_{fsp}$  区域内水蒸气成立,可表示为

$$\phi \frac{\partial \rho_v}{\partial \tau} = D_{vs} \frac{\partial^2 \rho_v}{\partial z^2} + \dot{m}_v \quad (6-3-3)$$

根据物理模型中的假定 4, 在  $W < W_{\text{fsp}}$  的干区, 水蒸气密度与液相吸着水处于相平衡, 水蒸气密度与吸着水含水率的关系将在 6.3.2.4 节中介绍。这样, 式(6-3-3)并不是关于水蒸气密度  $\rho_v$  的控制方程, 而是作为材料内部液相水体积蒸发率  $\dot{m}_v$  的控制方程。为此, 将式(6-3-3)改写成

$$\dot{m}_v = \phi \frac{\partial \rho_v}{\partial \tau} - D_{vs} \frac{\partial^2 \rho_v}{\partial z^2} \quad (6-3-4)$$

式(6-3-4)的含义是, 多孔材料干区域内每一处单位时间单位体积内水蒸气蒸发的质量  $\dot{m}_v$  等于单位时间单位体积内水蒸气质量的增加  $\phi(\partial \rho_v / \partial \tau)$  以及由于水蒸气的扩散而离开该单位体积水蒸气的质量  $-D_{vs}(\partial^2 \rho_v / \partial z^2)$ 。

### 6.3.2.3 能量守恒

在  $W \geq W_{\text{fsp}}$  湿区域与在  $W < W_{\text{fsp}}$  干区域, 能量守恒方程是不同的。

在  $W \geq W_{\text{fsp}}$  湿区域, 与式(5-5-5)相似, 能量守恒方程为

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + D_{ls} \rho_d c_l \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} \quad (6-3-5)$$

在  $W < W_{\text{fsp}}$  区域, 能量守恒方程则为

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + D_{ls} \rho_d c_l \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} - \dot{m}_v \gamma \quad (6-3-6)$$

式(6-3-6)是式(6-2-13)的一维形式。由于材料内气体流动对温度场影响微略, 这里予以忽略。式(6-3-5)与式(6-3-6)分别为在  $W \geq W_{\text{fsp}}$  与  $W < W_{\text{fsp}}$  区域内温度的控制方程。

### 6.3.2.4 热力学关系式

在  $W \geq W_{\text{fsp}}$  的湿区域, 根据假定 2, 液相水为自由水, 与它处于相平衡的水蒸气为饱和水蒸气, 由温度即可得相应地饱和水蒸气密度  $\rho_v$  与饱和水蒸气压力  $p_v$ , 在具体运算时通过“饱和水与饱和蒸气热力性质表”查得, 这里表示为

$$\rho_v = f_p(t) \quad (6-3-7)$$

与

$$p_v = f_p(t) \quad (6-3-8)$$

式(6-3-7)与式(6-3-8)是水蒸气密度  $\rho_v$  与水蒸气压力  $p_v$  在  $W \geq W_{\text{fsp}}$  区域的控制方程。

在  $W < W_{\text{fsp}}$  干区域内,液相水为吸着水,与它处于相平衡的水蒸气为未饱和水蒸气(过热水蒸气)。未饱和水蒸气的压力对应着当地湿空气相对湿度  $\varphi$ ,如下式所示

$$p_v = p_{sv}\varphi \quad (6-3-9)$$

上式表示,水蒸气压力  $p_v$  可通过当地相对湿度  $\varphi$  及当地温度对应下饱和水蒸气压力  $p_{sv}$  得到。在已知  $p_v$  条件下,干区域内的水蒸气密度由如下理想气体状态方程求得

$$\rho_v = p_v \frac{M_v}{RT} \quad (6-3-10)$$

相对湿度  $\varphi$  与温度  $t$  及含水率  $W$  的关系如式(6-2-12)所示,这里重新列为

$$\varphi = f_p^*(t, W) \quad (6-3-11)$$

上述式(6-3-9)、式(6-3-10)与式(6-3-11)是水蒸气压力  $p_v$ 、水蒸气密度  $\rho_v$  与相对湿度  $\varphi$  在  $W < W_{\text{fsp}}$  区域的控制方程。对照式(6-3-7)与式(6-3-10)以及式(6-3-8)与式(6-3-9)可看到,在湿区与干区内寻找水蒸气密度  $\rho_v$  与压力  $p_v$  的途径是不同的。

### 6.3.2.5 表面蒸发率与界面蒸发率

材料表面处的液相水蒸发率  $\dot{m}_s$  应该是在方程(6-3-1)的边界条件中出现,即

$$-D_{ls}\rho_d \frac{\partial W}{\partial z} = \dot{m}_s \quad (6-3-12)$$

式(6-3-12)的含义是,单位时间从材料内部以扩散形式到达单位表面积水的质量等于单位时间单位面积上由液相水蒸发成水蒸气的质量。当表面处的含水率高于纤维饱和点条件下,  $W > W_{\text{fsp}}$ , 自由水浸润着材料的整个表面,在表面就地蒸发的水蒸气被环境空气流以对流形式带走,则式(6-3-12)中  $\dot{m}_s$  的表达形式与式(6-2-24)相同,此处表示为

$$\dot{m}_s = h_m(\rho_v - \rho_{v,e}) \quad (6-3-13)$$

式(6-3-13)是  $W \geq W_{\text{fsp}}$  条件下表面蒸发率  $\dot{m}_s$  的控制方程,式中  $\rho_v$  是表面温度对应下的饱和水蒸气密度。

当表面处的含水率低于纤维饱和点时,  $W_s < W_{\text{fsp}}$ , 根据物理模型中假定 12, 式(6-3-13)可写成

$$\dot{m}_s = h_m^*(W_s - W_e) \quad (6-3-14)$$



对照式(6-3-13)与式(6-3-14)可发现,当将传质驱动力由密度差改为含水率差之后,表面传质系数由  $h_m$  改为  $h_m^*$ ,两者之间在量纲与数值上是不相同的。式(6-3-14)是  $W_s < W_{fsp}$  条件下表面蒸发率  $\dot{m}_s$  的控制方程。

当材料表面处的含水率低于纤维饱和点时,  $W_s < W_{fsp}$ , 且  $W = W_{fsp}$  的移动界面后退至材料内部,  $W = W_{fsp}$  界面处质量守恒表示为

$$-D_{ls}\rho_d \frac{\partial(W - W_{fsp})}{\partial z} = \dot{m}_i - D_{ls}\rho_d \frac{\partial W}{\partial z} \quad (6-3-15)$$

式(6-3-15)是方程(6-3-1)与方程(6-3-2)的界面条件,其含义是,从  $W \geq W_{fsp}$  区域扩散至界面的液相水(自由水)的质量流密度(单位时间内流过单位面积的质量)等于界面上蒸发率(单位时间内在单位面积上蒸发的质量)与由界面向  $W < W_{fsp}$  干区域扩散的液相水(吸着水)的质量流密度之和。应该指出,式(6-3-15)等号两边的液相水扩散率  $D_{ls}$  的值是不同的。

界面处质量守恒还可表示为

$$\rho_d(W - W_{fsp}) \frac{d\delta}{d\tau} = \dot{m}_i \quad (6-3-16)$$

式(6-3-16)的含义是,界面上的蒸发率是单位时间界面后退空间内所包含的自由水的质量,  $\delta$  是干区的厚度。式(6-3-16)是因变量  $\delta$  的控制方程。

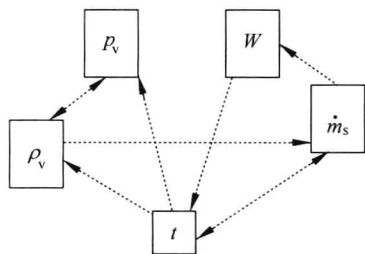
作为界面条件的式(6-3-15)中的  $\dot{m}_i$  不同于作为边界条件的式(6-3-13)中的  $\dot{m}_s$ 。式(6-3-13)表示材料表面液相水蒸发的水蒸气以对流传质形式传输到环境中,而界面上液相水蒸发的水蒸气只有从材料内部扩散至表面而后传输给环境。为此,对照式(6-3-13),将  $\dot{m}_i$  表示为

$$\dot{m}_i = \frac{D_{vs}}{\delta}(\rho_v - \rho_{v,e}) \quad (6-3-17)$$

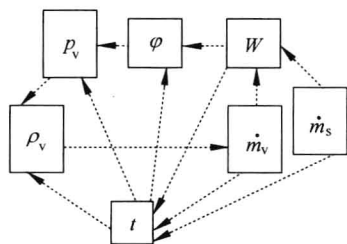
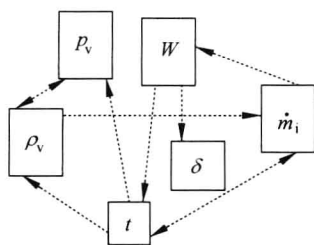
式中,  $D_{vs}$  为水蒸气在干区内的质扩散率;  $\rho_v$  是界面水蒸气密度,也是界面温度对应下的饱和水蒸气密度。当  $\delta$  很小时,若  $\dot{m}_i$  大于  $\dot{m}_s$ ,此条件下,用  $\dot{m}_s$  替代  $\dot{m}_i$ 。随  $\delta$  增加,  $\dot{m}_i$  逐渐变小。式(6-3-17)是移动界面蒸发率  $\dot{m}_i$  的控制方程。

综上所述,当材料表面  $W \geq W_{fsp}$  条件下,整个材料都处于湿区,控制方程为式(6-3-1)、式(6-3-5)、式(6-3-7)、式(6-3-8)及式(6-3-13)共5个方程,对应5个因变量  $W$ 、 $t$ 、 $\rho_v$ 、 $p_v$  与  $\dot{m}_s$ 。而当材料被分成  $W \geq W_{fsp}$  湿区与  $W < W_{fsp}$  干区两个区域后,在  $W \geq W_{fsp}$  湿区内,控制方程为式(6-3-1)、式(6-3-5)、式(6-3-7)、式(6-3-8)、式(6-3-16)和式(6-3-17)共6个方程,对应6个因变量  $W$ 、 $t$ 、 $\rho_v$ 、 $p_v$ 、 $\delta$  与  $\dot{m}_i$ ;在  $W < W_{fsp}$  区域内,控制方程为式(6-3-2)、式(6-3-4)、式(6-3-6)、式(6-3-9)、

式(6-3-10)、式(6-3-11)和式(6-3-14)共 7 个方程,对应 7 个因变量  $W$ 、 $\dot{m}_v$ 、 $t$ 、 $p_v$ 、 $\rho_v$ 、 $\varphi$  与  $\dot{m}_s$ 。上述三种情形因变量间的耦合关系分别表示在图 6-17 中的(a),(b)与(c)。



(a) 整个材料  $W \geq W_{fsp}$  条件下 5 个因变量耦合关系



(b)  $W \geq W_{fsp}$  湿区内 6 个因变量耦合关系 (c)  $W < W_{fsp}$  干区内 7 个因变量耦合关系

图 6-17 干燥模型因变量间的耦合关系

### 6.3.2.6 定解条件

#### 1. 几何条件

给出平板多孔材料表面积  $A$  与厚度  $H$ 。在一维模型中  $A=1$ 。由于蒸发面是一个移动界面,问题求解的两个几何区域随时间变化。

#### 2. 初始条件

作为加热过程开始,对应于图 6-17 中 5 个因变量的控制方程式(6-3-1)、式(6-3-5)、式(6-3-7)、式(6-3-8)与式(6-3-13),应给出含水率  $W$ 、温度  $t$ 、水蒸气密度  $\rho_v$  与压力  $p_v$  以及表面蒸发率  $\dot{m}_s$  的初始值,即,  $W=W_0$ ,  $t=t_0$ ,  $\rho_v=\rho_{v0}$ ,  $p_v=p_{v0}$  及  $\dot{m}_s=0$ 。过程中的其余 4 个因变量,即相对湿度  $\varphi$ 、干区厚度  $\delta$ 、界面蒸发率  $\dot{m}_i$  及体积蒸发率  $\dot{m}_v$  的初始值并不参加运算,也就不必给出了。

### 3. 边界条件

(1) 对应关于含水率  $W$  的微分方程为式(6-3-1)时, 即  $W \geq W_{\text{fsp}}$  区域, 它的边界条件是

在  $z=0$  处,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (6-3-18)$$

在  $z=H$  处, 边界条件为式(6-3-12), 包含式(6-3-13)。当蒸发面退到材料内部, 对于  $W \geq W_{\text{fsp}}$  区域,  $W$  的边界条件为界面条件, 由式(6-3-15)表示。

对应关于含水率  $W$  的微分方程为式(6-3-2)时, 即  $W < W_{\text{fsp}}$  区域, 它同样有两个边界条件。一个是界面条件式(6-3-15), 另一个是在  $z=H$  处的条件。当  $z=H$  处  $W < W_{\text{fsp}}$  条件下, 边界条件仍为式(6-3-12), 但包含式(6-3-14)。

(2) 对应关于体积蒸发率  $\dot{m}_v$  的微分方程为式(6-3-4)时, 即  $W < W_{\text{fsp}}$  区域,  $\dot{m}_v$  本身无需边界条件, 但在寻求边界处的  $\dot{m}_v$  时, 需要水蒸气密度  $\rho_v$  的边界条件, 为此将  $\rho_v$  的边界条件表示为

在  $z=H$  处,

$$-D_{\text{vs}} \frac{\partial \rho_v}{\partial z} = h_m(\rho_v - \rho_{v,e}) \quad (6-3-19)$$

此式与表示材料表面液相水蒸发的式(6-3-12)[含式(6-3-13)]相似, 但式(6-3-19)中表面处散失的水蒸气是由内部水蒸气扩散到表面造成的, 而式(6-3-13)中表面的水蒸气是由内部液相水扩散至表面并在表面由液相水转化成水蒸气所造成的, 且水蒸气密度唯一取决于表面温度, 为表面温度对应下的饱和水蒸气密度。

水蒸气密度  $\rho_v$  的另一个边界条件在  $W = W_{\text{fsp}}$  移动界面处, 根据质量守恒原则, 可得

$$-D_{\text{vs}} \frac{\partial \rho_v}{\partial z} = \dot{m}_i \quad (6-3-20)$$

式(6-3-20)的含义是, 移动界面上液相水的蒸发率等于传向  $W < W_{\text{fsp}}$  区域的水蒸气质量流密度(质量扩散流率)。

(3) 对应关于温度  $t$  的微分方程为式(6-3-5)时, 即  $W \geq W_{\text{fsp}}$  区域, 它的边界条件为

在  $z=0$  处,

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (6-3-21)$$

在  $z=H$  处, 若  $W \geq W_{\text{fsp}}$

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = h(t_e - t) - \dot{m}_s \gamma \quad (6-3-22)$$

此式的含义是, 环境对材料表面的热流密度扣除单位时间单位面积上液相水蒸发成水蒸气所需热量(等号右边)等于以导热方式传向材料内部的热流密度(等号左边)。若当蒸发面退到材料内部, 对于  $W \geq W_{\text{fsp}}$  区域,  $W$  的边界条件为界面条件, 由式(6-3-24)表示。

对应关于温度  $t$  的微分方程为式(6-3-6)时, 即  $W < W_{\text{fsp}}$  区域, 它同样有两个边界条件。一个是在  $z=H$  处,

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = h(t_e - t) \quad (6-3-23)$$

式(6-3-23)表示材料表面液相水蒸发所携带的能量被忽略了, 同时忽略材料表面处水蒸气向环境扩散而带走的热量。另一个边界条件在移动界面上, 如图 6-18 所示。

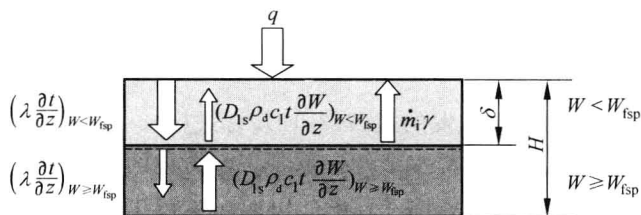


图 6-18 移动界面上能量平衡

介于  $W \geq W_{\text{fsp}}$  与  $W < W_{\text{fsp}}$  的移动界面的能量守恒方程为

$$\begin{aligned} & - \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right)_{W \geq W_{\text{fsp}}} + \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right)_{W < W_{\text{fsp}}} \\ & - \left( D_{\text{ls}} \rho_d c_1 \frac{\partial W}{\partial z} t \right)_{W \geq W_{\text{fsp}}} + \left( D_{\text{ls}} \rho_d c_1 \frac{\partial W}{\partial z} t \right)_{W < W_{\text{fsp}}} = \dot{m}_i \gamma \end{aligned} \quad (6-3-24)$$

式(6-3-24)的含义是, 从  $W < W_{\text{fsp}}$  区域内以导热方式(等号左边第 2 项)以及从  $W \geq W_{\text{fsp}}$  区域液相水扩散传到界面的热流密度(等号左边第 3 项)之和扣除以导热方式传向  $W \geq W_{\text{fsp}}$  区域(等号左边第 1 项)以及从界面以液相水扩散到  $W < W_{\text{fsp}}$  区域的热流密度(等号左边第 4 项)等于界面上单位时间单位面积蒸发所消耗的热量(等号右边)。

总之, 当  $z=H$  处  $W \geq W_{\text{fsp}}$  时, 方程(6-3-5)的两个边界条件是式(6-3-21)

与式(6-3-22);当 $z=H$ 处 $W<W_{\text{fsp}}$ 时,方程(6-3-5)的两个边界条件分别为式(6-3-21)与式(6-3-24);方程(6-3-6)的两个边界条件分别为式(6-3-24)与式(6-3-23)。

#### 4. 物理条件

物理条件包括出现在控制方程与定解条件中各项系数,这里不一一列出,但需指出,在本节模型中,水在多孔材料中扩散率 $D_{\text{ls}}$ 与5.5节有所不同。材料在环境条件下的平衡含水率 $W_e$ 在本模型中是一项重要的物理条件,它在已知环境空气温度 $t_e$ 与环境相对湿度 $\varphi_e$ 条件下由式(6-1-14)求得。

### 6.3.3 差分方程

本节介绍的差分方程与5.5.3节相近。本节中存在的蒸发移动界面以 $W=W_{\text{fsp}}$ 为基准,如图6-19所示。在 $W\geq W_{\text{fsp}}$ 的湿区域, $1\leq j\leq JZIN$ ;在 $W<W_{\text{fsp}}$ 的干区域, $JZIN<j\leq JZ$ , $j=JZIN$ 是移动界面占有的单元。

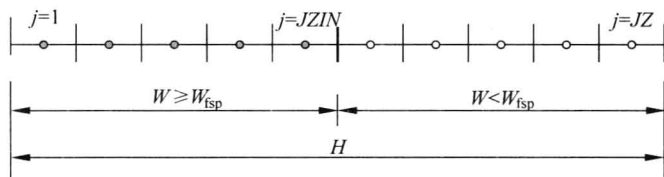


图 6-19 含移动界面离散区域的单元与节点

现将上述6.3.2节中介绍的诸因变量的控制方程及相应定解条件逐一写成差分方程。为便于求解,都为显式差格式。

#### 6.3.3.1 含水率

##### 1. $W\geq W_{\text{fsp}}$ 区域

在 $W\geq W_{\text{fsp}}$ 湿区域,对应于 $1\leq j\leq JZIN$ ,其中 $1<j<JZIN$ 属于内部单元,由控制方程(6-3-1)得到的差分方程与式(5-5-15)相似,即

$$W_j^{n+1} = W_j^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} [D_{\text{ls},j-1,j}(W_{j-1}^n - W_j^n) + D_{\text{ls},j+1,j}(W_{j+1}^n - W_j^n)] \quad (6-3-25)$$

对于 $j=1$ 边界单元,将边界条件式(6-3-18)用控制容积法写成相应地差分方程与式(5-5-24)相似,即为

$$W_j^{n+1} = W_j^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} D_{ls,j+1,j} (W_{j+1}^n - W_j^n) \quad (6-3-26)$$

对于  $j=JZIN$  边界单元,若  $JZIN=JZ$ ,即材料表面  $W_{JZ} \geq W_{fsp}$ ,将边界条件式(6-3-12)用控制容积法写成相应地差分方程,即为

$$W_j^{n+1} = W_j^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} D_{ls,j-1,j} (W_{j-1}^n - W_j^n) - \dot{m}_s^n \frac{\Delta\tau}{\rho_d \Delta z} \quad (6-3-27)$$

式中的  $\dot{m}_s^n$  由即将介绍的式(6-3-46)求得。

对于  $j=JZIN$  边界单元,若  $j=JZIN < JZ$ ,由界面方程式(6-3-15)用控制容积法将其写成相应地差分方程,即

$$\begin{aligned} W_j^{n+1} = & W_j^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} [D_{ls,j-1,j} (W_{j-1}^n - W_j^n) \\ & + D_{ls,j+1,j} (W_{j+1}^n - W_j^n)] - \frac{\dot{m}_{i,j}^n \Delta\tau}{\rho_d \Delta z} \end{aligned} \quad (6-3-28)$$

式中  $\dot{m}_{i,j}^n$  由即将介绍的式(6-3-48)求得。

## 2. $W < W_{fsp}$ 区域

在  $W < W_{fsp}$  区域,  $JZIN+1 \leq j \leq JZ$ 。其中  $JZIN+1 < j < JZ$  属于内部单元,由控制方程(6-3-2)得到相应差分方程为

$$\begin{aligned} W_j^{n+1} = & W_j^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} [D_{ls,j-1,j} (W_{j-1}^n - W_j^n) \\ & + D_{ls,j+1,j} (W_{j+1}^n - W_j^n)] - \frac{\dot{m}_v^n \Delta\tau}{\rho_d} \end{aligned} \quad (6-3-29)$$

边界单元  $j=JZIN+1$ ,若  $JZIN+1 < JZ$ ,将界面条件式(6-3-15)用控制容积法写成相应地差分方程为

$$\begin{aligned} W_j^{n+1} = & W_j^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} [D_{ls,j-1,j} (W_{j-1}^n - W_j^n) + D_{ls,j+1,j} (W_{j+1}^n - W_j^n)] \\ & + \frac{\dot{m}_{i,j}^n \Delta\tau}{\rho_d \Delta z} - \frac{\dot{m}_v^n \Delta\tau}{\rho_d} \end{aligned} \quad (6-3-30)$$

另一个边界单元  $j=JZ$ ,将边界条件式(6-3-12)[含式(6-3-14)]用控制容积法写成相应地差分方程为

$$W_j^{n+1} = W_j^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta z^2} D_{ls,j-1,j} (W_{j-1}^n - W_j^n)$$

$$-\frac{\dot{m}_{v,j}^n \Delta \tau}{\rho_d} - \dot{m}_s^n \frac{\Delta \tau}{\rho_d \Delta z} \quad (6-3-31)$$

当  $j = JZIN + 1 = JZ$ , 即该单元的一边与交界面相邻, 另一边与环境相邻, 则结合式(6-3-30)与式(6-3-31)可写为

$$W_j^{n+1} = W_j^n + \frac{\Delta \tau}{\Delta z^2} D_{ls,j-1,j} (W_{fsp} - W_j^n) - \frac{\dot{m}_{v,j}^n \Delta \tau}{\rho_d} - \dot{m}_s^n \frac{\Delta \tau}{\rho_d \Delta z} \quad (6-3-32)$$

式(6-3-31)与式(6-3-32)中的  $\dot{m}_s^n$  由即将介绍的式(6-3-47)求得。

### 6.3.3.2 水蒸气密度、水蒸气压力与相对湿度

在  $W \geq W_{fsp}$  湿区域, 对应于  $1 \leq j \leq JZIN$ , 液相水为自由水, 相应地水蒸气密度与压力为对应该单元温度下的饱和水蒸气密度与压力, 即将式(6-3-7)与式(6-3-8)写成差分形式

$$\rho_{v,j}^{n+1} = f_\rho(t_j^{n+1}) \quad (6-3-33)$$

与

$$p_{v,j}^{n+1} = f_p(t_j^{n+1}) \quad (6-3-34)$$

相对湿度  $\varphi$  在  $W \geq W_{fsp}$  湿区域内不出现, 隐含  $\varphi = 1$ 。

在  $W < W_{fsp}$  干区域内, 对应于  $JZIN + 1 \leq j \leq JZ$ , 液相水为吸着水, 相应地水蒸气压力  $p_v$  和密度  $\rho_v$  与对应的空气相对湿度  $\varphi$  有关, 三者的关系如式(6-3-9)、式(6-3-10)与式(6-3-11)所示, 它们的差分形式为

$$\rho_{v,j}^{n+1} = p_{v,j}^{n+1} \frac{M_v}{RT_j^{n+1}} \quad (6-3-35)$$

$$p_{v,j}^{n+1} = p_{sv,j}^{n+1} \varphi_j^{n+1} \quad (6-3-36)$$

及

$$\varphi_j^{n+1} = f_p^*(t_j^{n+1}, W_j^{n+1}) \quad (6-3-37)$$

### 6.3.3.3 温度

#### 1. $W \geq W_{fsp}$ 区域

在  $W \geq W_{fsp}$  区域, 对应于  $1 \leq j \leq JZIN$ , 其中  $1 < j < JZIN$  属于内部单元, 由控制方程(6-3-2)得到相应差分方程与式(5-5-31)相似, 即为

$$\begin{aligned}
 t_j^{n+1} = & t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j} (t_{j-1}^n - t_j^n) + \lambda_{j+1,j} (t_{j+1}^n - t_j^n) \\
 & + D_{ls,j-1,j} \rho_d c_1 (W_{j-1}^n - W_j^n) t_{j-1}^n \\
 & - D_{ls,j+1,j} \rho_d c_1 (W_j^n - W_{j+1}^n) t_j^n]
 \end{aligned} \quad (6-3-38)$$

其中,  $\lambda_{j-1,j}$  与  $\lambda_{j,j+1}$  已被表示为式(5-4-26)与式(5-4-27)。

对于  $j=1$  边界单元, 将边界条件式(6-3-21)用控制容积法写成相应地差分方程, 与式(5-5-32)相似, 即为

$$\begin{aligned}
 t_j^{n+1} = & t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j+1,j} (t_{j+1}^n - t_j^n) \\
 & - D_{ls,j} \rho_d c_1 (W_j^n - W_{j+1}^n) t_j^n]
 \end{aligned} \quad (6-3-39)$$

对于  $j=JZIN$  边界单元, 若  $JZIN=JZ$ , 将边界条件式(6-3-22)用控制容积法写成相应地差分方程, 与式(5-5-33)相似, 即为

$$\begin{aligned}
 t_j^{n+1} = & t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j} (t_{j-1}^n - t_j^n) \\
 & + D_{ls,j-1,j} \rho_d c_1 (W_{j-1}^n - W_j^n) t_{j-1}^n \\
 & + h(t_e - t_j^n) \Delta z - \dot{m}_s^n \gamma \Delta z]
 \end{aligned} \quad (6-3-40)$$

若  $j=JZIN < JZ$ , 将界面条件(6-3-24)在  $W \geq W_{fsp}$  一侧用控制容积法写成相应地差分方程, 即为

$$\begin{aligned}
 t_j^{n+1} = & t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j} (t_{j-1}^n - t_j^n) + \lambda_{j+1,j} (t_{j+1}^n - t_j^n) \\
 & + D_{ls,j-1,j} \rho_d c_1 (W_{j-1}^n - W_j^n) t_{j-1}^n \\
 & - D_{ls,j+1,j} \rho_d c_1 (W_j^n - W_{j+1}^n) t_j^n - \dot{m}_{i,j} \gamma \Delta z]
 \end{aligned} \quad (6-3-41)$$

## 2. $W < W_{fsp}$ 区域

在  $W < W_{fsp}$  区域, 对应于  $JZIN+1 \leq j \leq JZ$ , 其中  $JZIN+1 < j < JZ$  属于内部单元, 其差分方程由控制方程(6-3-6)可得

$$\begin{aligned}
 t_j^{n+1} = & t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} [\lambda_{j-1,j} (t_{j-1}^n - t_j^n) + \lambda_{j+1,j} (t_{j+1}^n - t_j^n) - \dot{m}_{v,j} \gamma \Delta z^2 \\
 & + D_{ls,j-1,j} \rho_d c_1 (W_{j-1}^n - W_j^n) t_{j-1}^n \\
 & - D_{ls,j+1,j} \rho_d c_1 (W_j^n - W_{j+1}^n) t_j^n]
 \end{aligned} \quad (6-3-42)$$

边界单元  $j=JZIN+1$ , 若  $JZIN+1 < JZ$ , 将界面条件(6-3-24)在  $W < W_{fsp}$  一侧用控制容积法写成相应地差分方程, 即为



$$\begin{aligned}
 t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} & [\lambda_{j-1,j}(t_{j-1}^n - t_j^n) + \lambda_{j+1,j}(t_{j+1}^n - t_j^n) - \dot{m}_{v,j}^n \gamma \Delta z^2 \\
 & + \dot{m}_{i,j}^n \gamma \Delta z + D_{ls,j-1,j} \rho_d c_1 (W_{j-1}^n - W_j^n) t_{j-1}^n \\
 & - D_{ls,j+1,j} \rho_d c_1 (W_j^n - W_{j+1}^n) t_j^n] \quad (6-3-43)
 \end{aligned}$$

另一个边界单元  $j=JZ$ , 将边界条件(6-3-23)用控制容积法写成相应地差分方程, 即为

$$\begin{aligned}
 t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} & [\lambda_{j-1,j}(t_{j-1}^n - t_j^n) + D_{ls,j-1,j} \rho_d c_1 (W_{j-1}^n - W_j^n) t_{j-1}^n \\
 & - \dot{m}_{v,j}^n \gamma \Delta z^2 + h(t_e - t_j^n) \Delta z] \quad (6-3-44)
 \end{aligned}$$

当  $j=JZIN+1=JZ$ , 即该单元的一边与交界面相邻, 另一边与环境相邻, 则结合式(6-3-43)与式(6-3-44)可写为

$$\begin{aligned}
 t_j^{n+1} = t_j^n + \frac{\Delta\tau}{\rho c \Delta z^2} & [\lambda_{j-1,j}(t_{j-1}^n - t_j^n) + D_{ls,j-1,j} \rho_d c_1 (W_{j-1}^n - W_j^n) t_{j-1}^n \\
 & + \dot{m}_{i,j}^n \gamma \Delta z - \dot{m}_v \gamma \Delta z^2 + h(t_e - t_j^n) \Delta z] \quad (6-3-45)
 \end{aligned}$$

#### 6.3.3.4 表面蒸发率、界面蒸发率与体积蒸发率

##### 1. 表面与界面蒸发率

表面与界面上的蒸发率由式(6-3-13)、式(6-3-14)与式(6-3-17)所示。当  $W_{JZ}^n > W_{fsp}$ , 即材料表面含水率高于纤维饱和点条件下, 对应于式(6-3-13), 可写成

$$\dot{m}_s^{n+1} = h_m (\rho_{v,JZ}^n - \rho_{v,e}) \quad (6-3-46)$$

其中  $\rho_{v,JZ}^n$  由当时当地温度  $t_{JZ}^n$  决定, 即当地温度对应下的饱和蒸气密度。

当  $W_{JZ}^n < W_{fsp}$ , 即在  $JZIN < JZ$  条件下, 在  $j=JZ$  处, 对应于式(6-3-14), 可写成

$$\dot{m}_s^{n+1} = h_m^* (W_{JZ}^n - W_e) \quad (6-3-47)$$

在  $j=JZIN$  的界面处, 界面蒸发率由式(6-3-17)求得, 写成

$$\dot{m}_{i,j}^{n+1} = \frac{D_{vs}}{\delta^n} (\rho_{v,j}^n - \rho_{v,e}) \quad (6-3-48)$$

##### 2. 体积蒸发率

体积蒸发率的差分方程只对  $W < W_{fsp}$  区域内水蒸气成立, 对应于  $JZIN+1 \leq j \leq JZ$ , 其中  $JZIN+1 < j < JZ$  属于内部单元, 其差分方程由控制方程(6-3-4)

可得

$$\dot{m}_{v,j}^{n+1} = \frac{\phi}{\Delta\tau}(\rho_{v,j}^{n+1} - \rho_{v,j}^n) - \frac{D_{vs}}{\Delta z^2}(\rho_{v,j-1}^n - 2\rho_{v,j}^n + \rho_{v,j+1}^n) \quad (6-3-49)$$

边界单元  $j=JZIN+1$ , 若  $JZIN+1 < JZ$ , 将边界条件式(6-3-20)用控制容积法写成相应地差分方程为

$$\dot{m}_{v,j}^{n+1} = \frac{\phi}{\Delta\tau}(\rho_{v,j}^{n+1} - \rho_{v,j}^n) - \frac{D_{vs}}{\Delta z^2}(\rho_{v,j-1}^n - 2\rho_{v,j}^n + \rho_{v,j+1}^n) - \frac{\dot{m}_{i,j}^n}{\Delta z} \quad (6-3-50)$$

这里的  $\rho_{v,j-1}^n$  为对应于  $j=JZIN$  单元温度的饱和水蒸气密度。

另一个边界单元  $j=JZ$ , 将边界条件式(6-3-19)用控制容积法写成相应地差分方程, 为

$$\dot{m}_{v,j}^{n+1} = \frac{\phi}{\Delta\tau}(\rho_{v,j}^{n+1} - \rho_{v,j}^n) - \frac{D_{vs}}{\Delta z^2}(\rho_{v,j-1}^n - \rho_{v,j}^n) + \frac{D_{vs}}{\Delta z^2}(\rho_{v,j}^n - \rho_e) \quad (6-3-51)$$

若  $j=JZIN+1=JZ$ , 即该单元的一边与交界面相邻, 另一边与环境相邻, 则结合式(6-3-50)与式(6-3-51)可写为

$$\begin{aligned} \dot{m}_{v,j}^{n+1} = & \frac{\phi}{\Delta\tau}(\rho_{v,j}^{n+1} - \rho_{v,j}^n) - \frac{D_{vs}}{\Delta z^2}(\rho_{v,j-1}^n - \rho_{v,j}^n) \\ & - \frac{\dot{m}_{i,j}^n}{\Delta z} + \frac{D_{vs}}{\Delta z^2}(\rho_{v,j}^n - \rho_e) \end{aligned} \quad (6-3-52)$$

式(6-3-51)与式(6-3-52)中最后一项  $D_{vs}(\rho_{v,j}^n - \rho_e)/\Delta z^2$  中的  $D_{vs}/\Delta z^2$  即为式(6-3-19)中的  $h_m$ 。

### 6.3.3.5 干区厚度

与 5.5.3.5 节讨论相仿, 因变量干区厚度  $\delta$  的差分形式, 即为式(6-3-48)的分母, 是一个简单的表达式

$$\delta^{n+1} = (JZ - JZIN) \times \Delta z \quad (6-3-53)$$

综上所述, 当材料表面  $W \geq W_{fsp}$  条件下, 整个材料都处于湿区, 由式(6-3-25)~式(6-3-27)、式(6-3-33)、式(6-3-34)、式(6-3-38)~式(6-3-40)及式(6-3-46)求解 5 个因变量  $W_j^n$ 、 $t_j^n$ 、 $\rho_{v,j}^n$ 、 $p_{v,j}^n$  与  $\dot{m}_s^n$ 。而当材料被分成  $W \geq W_{fsp}$  湿区与  $W < W_{fsp}$  干区两个区域后, 在  $W \geq W_{fsp}$  湿区内, 由式(6-3-25)、式(6-3-26)、式(6-3-28)、式(6-3-33)、式(6-3-34)、式(6-3-38)、式(6-3-39)、式(6-3-41)、式(6-3-48)和

式(6-3-53)求解 6 个因变量  $W_j^n$ 、 $t_j^n$ 、 $\rho_{v,j}^n$ 、 $p_{v,j}^n$ 、 $\delta^n$  与  $\dot{m}_{i,j}^n$ 。在  $W < W_{fsp}$  区域内,由式(6-3-29)~式(6-3-31)、式(6-3-35)~式(6-3-37)、式(6-3-42)~式(6-3-45)、式(6-3-47)和式(6-3-49)~式(6-3-52)求解 7 个因变量  $W_j^n$ 、 $t_j^n$ 、 $\rho_{v,j}^n$ 、 $p_{v,j}^n$ 、 $\dot{m}_{v,j}^n$ 、 $\varphi_j^n$  与  $\dot{m}_s^n$ 。由于这些差分方程都是显式的,在已知初始值后不难求得。

### 6.3.4 算例及计算结果讨论

本算例已知条件中与 5.5.4 节算例相同的部分不再重复。本算例以木材作为被干燥的多孔材料,材料的绝干密度  $\rho_d = 400 \text{ kg/m}^3$ ,作为固相骨架的纤维细胞壁绝干密度  $\rho_s = 1500 \text{ kg/m}^3$ ,相应地,由式(1-1-5)可知孔隙率  $\phi = 0.733$ 。固相骨架的比热容  $c_s = 1350 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ,导热系数  $\lambda_s = 1.0 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ ,纤维饱和点取为  $W_{fsp} = 0.3$ 。热空气流温度(干球温度)为  $90^\circ\text{C}$ ,湿球温度为  $60^\circ\text{C}$ ,相应地,空气相对湿度  $\varphi_e = 0.262$ ,露点  $t_d = 57.97^\circ\text{C}$ ,水蒸气密度  $\rho_{v,e} = 0.109 \text{ kg/m}^3$ ,材料的平衡含水率  $W_e = 3.24\%$ 。液相水在木材中的质扩散率  $D_{ls}$ 按表 5-4 所列数据,整理成下式:

$$\begin{cases} D_{ls} = 1.72 \times 10^{-9} (\text{m}^2/\text{s}), & \text{含水率 } W > 0.5 \\ D_{ls} = 1.28 \times 10^{-9} + \frac{W - W_{fsp}}{0.5 - W_{fsp}} \times (1.72 - 1.28) \times 10^{-9}, & W_{fsp} < W < 0.5 \\ D_{ls} = 0.5 \times 10^{-9} + \frac{W - 0.1}{W_{fsp} - 0.1} \times (1.28 - 0.5) \times 10^{-9}, & 0.1 < W < W_{fsp} \\ D_{ls} = 0.5 \times 10^{-10}, & W_e < W < 0.1 \end{cases} \quad (6-3-54)$$

水蒸气在木材中的质扩散率  $D_{vs} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。空气流对材料的表面传热系数  $h = 8.632 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$ ,式(6-3-13)中的表面传质系数  $h_m = 7.76 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ ,式(6-3-14)中的表面传质系数  $h_m^* = 3.88 \times 10^{-6} \text{ kg/(m}^2 \cdot \text{s)}$ 。

根据本节数学模型构成的定解问题而得到的相应差分方程组可算得因变量温度  $t$  与热流密度  $q$ 、含水率  $W$ 、水蒸气密度  $\rho_v$  与压力  $p_v$ 、表面蒸发率  $\dot{m}_s$  与体积蒸发率  $\dot{m}_v$  以及界面位置  $\delta$  和界面蒸发率  $\dot{m}_i$ ,它们在材料内的分布以及随时间的变化。下面结合图 6-20~图 6-30 予以说明。

#### 6.3.4.1 关于温度与热流密度

图 6-20~图 6-23 显示了温度与热流密度曲线。由图可见,就温度与热流密度变化规律而言,材料加热过程可分为四个阶段。

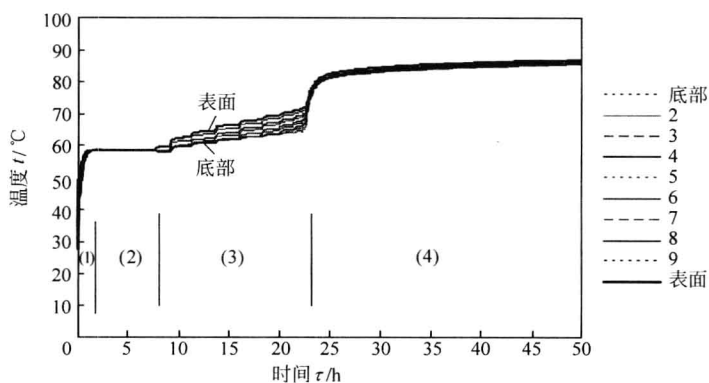


图 6-20 材料内温度分布随时间变化

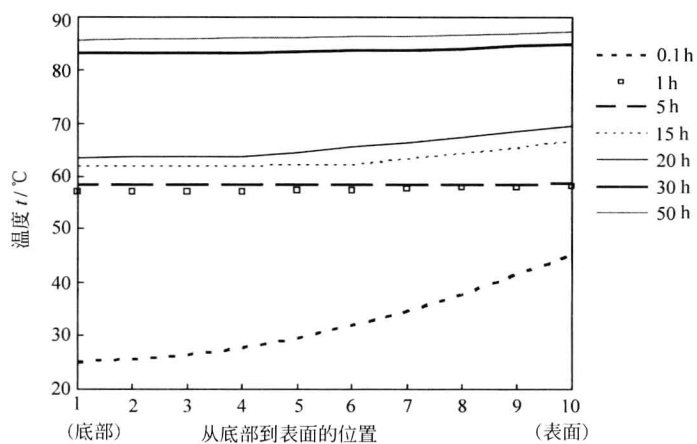


图 6-21 不同时刻下材料内温度分布

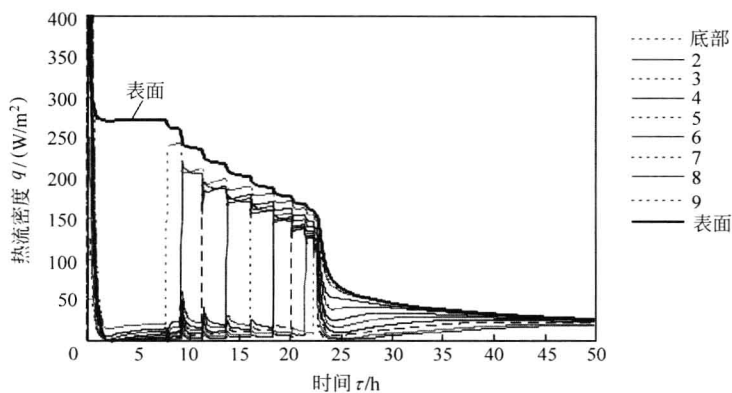


图 6-22 热流密度分布随时间变化

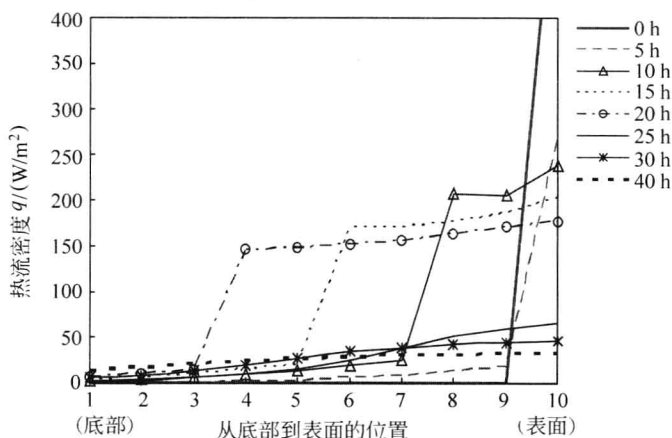


图 6-23 不同时刻下板内热流密度分布

第一阶段(1)( $0 < \tau < 1$  h), 由图 6-20 可见, 材料温度由初始值( $20^{\circ}\text{C}$ )迅速上升至接近环境湿球温度( $60^{\circ}\text{C}$ )。由图 6-22 可见, 环境对材料表面对流加热的热流密度迅速下降而渐近于某一稳定值。这个阶段还可分前、后两期。由于材料初始温度低于环境湿空气露点( $57.97^{\circ}\text{C}$ ), 在加热过程开始时, 材料表面不仅接受环境的对流加热还接受由于环境中水蒸气在表面上凝结成液相水而释放的汽化潜热, 这样, 材料表面升温迅速, 这是前期。当材料表面温度超过露点后, 一方面继续接受环境的对流加热, 且热流密度由于表面温度升高而有所下降; 另一方面, 因液相水在表面蒸发而消耗热量。这样, 表面温度上升的趋势明显放慢, 这是后期。在第二阶段, 材料内的温度分布从表面到底部由高到低, 表面与底部的温度差别由小而大再由大变小。这一特征从图 6-21 的曲线中可看到, 由时间  $\tau=0$  初始的水平线而当时间  $\tau=0.1$  h 变成弯曲线, 而后当时间  $\tau=1$  h 又变成近似于水平线。

相应地, 材料内导热热流密度的分布也经历了一个瞬态过程。下面结合表 6-3 所提供的数据来解释这阶段热流密度分布的行为。

加热过程刚开始( $\tau=0$ )只有材料表面接受环境热流密度, 材料内部的热流密度均为零。而当时间  $\tau=0.1$  h, 表面热流密度明显下降而内部热流密度迅速上升, 且在内部( $j=4, 5, \dots, 9$ )的热流密度超过表面热流密度。这是因为, 当表面温度迅速升高后, 环境与表面温度差减小, 相应地环境对表面的热流密度减小, 使表面与其邻近的内部有很陡的温度梯度, 由此造成很大的导热热流密度。这个导热热流密度不仅包含着表面对流热流密度的因素, 还包含着表面处水蒸气凝结的因素。

表 6-3 第一阶段热流密度瞬态分布

时间 /h	热流密度/(W/m <sup>2</sup> )									
	$j=1$ (底部)	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$ (表面)
0.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	604
0.1	125	252	380	511	642	773	899	1016	1111	387
0.6	32	63	93	122	148	172	191	205	216	290
0.8	15	30	44	58	70	80	88	93	103	280
1.0	8	17	25	32	39	44	48	51	60	276

随着材料内部各处(由表面附近至底部)温度升高,内部的温度梯度下降,当  $\tau=0.6\text{ h}$  时,材料内部的热流密度已有显著下降,且从材料表面到底部,热流密度由大至小单调下降。从  $\tau=0.6\text{ h}$  到  $\tau=1.0\text{ h}$  期间,材料表面的热流密度渐趋稳定,材料内部的热流密度继续下降,且从材料表面到底部,热流密度很快由大至小,显示内部温度分布已呈平坦。

第二阶段(2)( $1\text{ h}<\tau<7.8\text{ h}$ ),材料温度与热流密度都维持基本不变,温度在环境湿球温度附近,且略低于湿球温度。在图 6-21 中,这一阶段的温度分布表现为一条近似水平线,且不随时间变化,如图中所对应的  $\tau=1\text{ h}$  与  $\tau=5\text{ h}$  两条曲线几乎重叠。热空气以对流方式到达表面的热流密度大部分被挡在表面上,用于液相水的蒸发,除了表面处有很大的热流密度,材料内部各处都比较小,这一过程持续到材料表面的含水率  $W_{JZ}$  降至纤维饱和点  $W_{fsp}$ 。表 6-4 中所列数据清楚地体现了以上论述,同时,从这些数据中还可看到一些重要而详尽的信息。例如,虽说第二阶段期间材料温度在湿球温度附近,但表面处温度表现为由微弱的上升而转为微弱的下降,底部温度则单调地下降;又如,热流密度数据中有零星的负数,说明材料内某些局部处有短暂而微弱的反向导热。上述这些情形都是由于材料内部除了存在由表面到底部的热传导之外还存在着由底部到表面的热对流。这种热对流若很强,材料即便在受热过程,其内部某些地点的温度仍可能下降。

第三阶段( $7.8\text{ h}<\tau<22.6\text{ h}$ ),自材料表面的含水率  $W_{JZ}=W_{fsp}$  开始( $\tau=7.8\text{ h}$ ),而后,含水率继续下降,  $W_{JZ}<W_{fsp}$ ,相应地,如式(6-3-54)所示,水的质扩散率明显地下降,扩散至表面的液相水就会减少,上述第二阶段中“热流密度大部分被挡在表面上并用于液相水的蒸发”这一事实发生了变化。从热空气流到达材

表 6-4 第二阶段热流密度分布

时间 /h	热流密度/(W/m <sup>2</sup> )										含水率 /%	温度/℃	
	1 (底部)	2	3	4	5	6	7	8	9	10 (表面)		底部	表面
1.0	8	17	25	32	39	44	48	51	60	276	134	56.92	58.05
2.0	0	0	0	0	0	-1	1	5	13	272	103	58.48	58.54
3.0	0	0	-1	-1	0	1	3	8	16	272	84	58.42	58.52
5.0	0	0	0	1	3	5	8	13	18	272	58	58.30	58.50
7.5	0	1	2	3	5	8	11	15	19	272	33	58.20	58.49

料表面的热流密度小部分用于材料表面吸着水的蒸发,大部分将穿过表层( $j=JZ=10$ )到达次表面层( $j=JZ-1=9$ )。由表 6-5 中对应于  $\tau=7.7$  h 与  $\tau=7.8$  h 的数据以及图 6-22 中曲线可清楚看到,当表面单元进入干区后,表层热流密度下降(从  $272 \text{ W/m}^2$  到  $263 \text{ W/m}^2$ )以及与次表面(单元 9)热流密度迅速上升(从  $19 \text{ W/m}^2$  到  $239 \text{ W/m}^2$ )并与表层的热流密度十分接近。次表层在接受大的热流密度后,大量的液相水在此蒸发,这样,把热流就挡在次表层,内部单元( $j<9$ )上的热流密度都很小。从此, $W=W_{\text{fsp}}$  从材料表面退到材料内部, $W=W_{\text{fsp}}$  作为一个分界面自材料表面向内部平移。移动的界面将材料划分成上( $W<W_{\text{fsp}}$ )与下( $W\geq W_{\text{fsp}}$ )即干与湿的两个区域。 $W<W_{\text{fsp}}$  的干区,温度明显升高。 $W\geq W_{\text{fsp}}$  的湿区,温度大致上停留在湿球温度附近,反映在图 6-20 中,材料底部温度大致在湿球温度附近,略显上升。

在加热第三阶段(3),干、湿区内的温度分布有较明显的差别,这在图 6-21 中得到反映(对应于  $\tau=15$  h 与  $\tau=20$  h 的曲线)。同样,干、湿两个区域内热流密度有很大不同,在交界面处热流密度发生跃阶变化。这些特征清楚地反映在图 6-23 中的曲线及表 6-5 中的数据。

当整个材料的含水率降至纤维饱和点以下,表示第三阶段结束,过程进入第四阶段。

在第四阶段(4)( $\tau>22.6$  h),由于材料内已没有自由水,吸着水在木材内的质扩散率较小,迁移更困难,表面蒸发能力减弱,材料从环境中获得的热量更多地用于材料温度升高。同时,材料内水分减少,使材料的热容量减小,也有利于温度升高。总之,在进入加热第四阶段后,材料温度迅速地上升,材料内部温度分布逐渐趋于均匀,材料表面与底部的温度差逐渐缩小。与此同时,材料内部的热流密度

表 6-5 第三、四阶段热流密度分布

时间 /h	热流密度/(W/m <sup>2</sup> )									
	1 (底部)	2	3	4	5	6	7	8	9	10 (表面)
7.7	1	1	2	4	6	8	11	15	19	272
7.8	-1	-1	-1	-1	-1	1	4	8	239	263
8	-1	-1	-1	-1	3	5	9	16	239	263
10	2	4	6	9	13	19	26	208	206	238
15	3	6	10	15	19	172	172	177	187	204
20	5	10	14	147	149	151	156	163	171	177
25	1	2	5	10	16	26	39	51	59	65
30	5	9	13	19	27	34	39	43	45	46
40	14	18	21	25	27	29	30	31	32	33
50	18	20	22	23	24	25	25	26	26	26
60	19	20	21	22	22	23	23	23	23	23

分布也发生着变化。表面处热流密度随着材料温度升高而逐趋减小;而材料底部附近,由于温度升高,对底部温差加大,导致导热热流密度单调上升。这样,从表面到底部热流密度分布逐渐趋于均匀,直至当材料温度最终趋于环境温度(90℃)时,材料各处的热流密度也都趋于 0。

6.3.4.2 关于含水率

图 6-24 与图 6-25 显示了含水率  $W$  的响应曲线。与材料被加热的温度响应曲线相仿,材料干燥的含水率响应也分为四个阶段。图 6-24 中共计四条曲线,其中三条曲线分别对应于图 6-1 所示材料的底部(其实是整体材料中心面)、表面以及整体材料平均含水率。另一条是湿空气环境下材料的平衡含水率,它是一条水平线。如果说环境温度是材料被加热过程可能达到的极限温度,则平衡含水率是材料干燥过程可能达到的极限含水率。

第一阶段( $0 < \tau < 2.3$  h),图 6-24 的曲线中,底部的含水率几乎保持不变,表现为水平线,表面含水率经历了由初始值升高,达到最大值而后下降返回到初始值



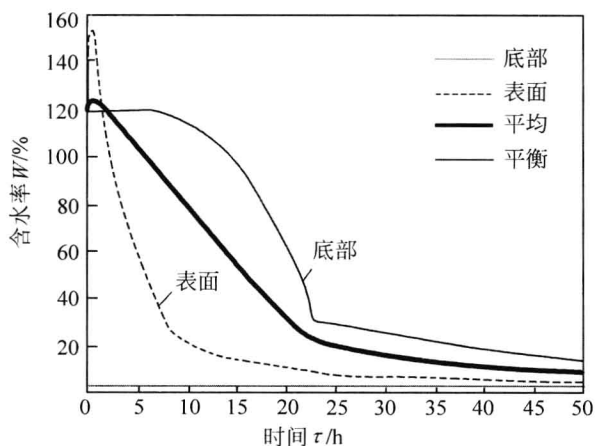


图 6-24 材料内水饱和度分布随时间变化

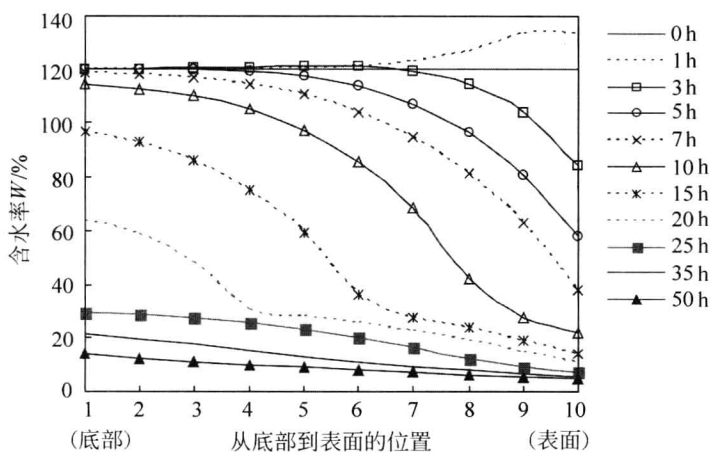


图 6-25 不同时刻材料内含水率的分布

的过程。平均含水率也经历了由初始值升高而后下降的过程。材料表面处含水率在干燥过程初期迅速升高的原因如 3.5.3 节中分析静止水面变化相同，是由材料的初始温度低于环境湿空气露点所致。这一阶段材料内含水率的典型分布表现为图 6-25 中对应于  $\tau=1$  h 的曲线。

第二阶段 ( $2.3 \text{ h} < \tau < 7.8 \text{ h}$ )，图 6-24 的曲线中，底部的含水率继续保持不变，

表现为水平线的延续,表面含水率由初始值而迅速下降直至纤维饱和点。底部与表面含水率两条曲线的距离渐行渐远。平均含水率呈直线下降,显示等速干燥。在图 6-25 中,含水率沿材料厚度方向的分布呈一条光滑的抛物线,且自上而下移动,曲线的弯曲程度越来越大,对应于图中  $\tau=3\text{ h}$ 、 $\tau=5\text{ h}$  与  $\tau=7\text{ h}$  的曲线。

当过程进入第三阶段( $7.8\text{ h}<\tau<22.6\text{ h}$ )后, $W=W_{\text{fsp}}$ 分界面由材料表面向底部平移。这个分界面也使含水率  $W$  在材料内的分布曲线发生显著变化,光滑的抛物线只存在  $W\geq W_{\text{fsp}}$  的区域,在移动交界面附近, $W$  的变化显得十分陡峭,如图 6-25 中  $\tau=10\text{ h}$ 、 $\tau=15\text{ h}$  与  $\tau=20\text{ h}$  的曲线所示。从图 6-24 中看到,在第三阶段,表面处含水率下降速率越来越慢,而底层处含水率下降速率越来越快,底部与表面含水率的差值逐渐趋小,材料含水率平均值的下降速度有所放慢。

当整个材料的  $W<W_{\text{fsp}}$  时,过程进入第四阶段( $\tau>22.6\text{ h}$ )。 $W$  的分布曲线在图 6-25 中呈现为近似一条直线,在图 6-24 中表现为表面与底部的曲线越来越接近,平均含水率的下降速度越来越慢。

#### 6.3.4.3 关于表面、界面蒸发率与体积蒸发率

将表面蒸发率  $\dot{m}_s$  与界面蒸发率  $\dot{m}_i$  一起绘制在图 6-26 中,其中粗实线代表表面蒸发率  $\dot{m}_s$ ,细/虚线代表界面蒸发率  $\dot{m}_i$ 。由图 6-26 可见,在加热过程的第一与第二阶段,液相水蒸发发生在材料表面。在第一阶段( $0<\tau<2\text{ h}$ ),蒸发率迅速上升至某一稳定值。在第二阶段( $2\text{ h}<\tau<7.8\text{ h}$ ),蒸发率基本维持在稳定值。在进入第三阶段( $7.8\text{ h}<\tau<22.6\text{ h}$ )后,蒸发面从表面退到材料内部  $W=W_{\text{fsp}}$  处。这个移动的界面从材料表面到底部不断后退过程中,蒸发率在逐步减小。图 6-26 所示的曲线清晰地表示了这个界面不断后退及蒸发率逐级下降的过程。在表面蒸发时,蒸发率几乎为常数,这是由于材料表面的温度几乎为常数所致。如果仔细观察表面蒸发率曲线可见,它不是严格意义上的常数,在这个阶段中,在表面蒸发率几乎为常数过程中略有下降,这也是因为材料表面的温度略有下降的缘故。

在加热第一与第二阶段,蒸发面处于材料表面时,此表面接受热空气流的对流加热,而当第三阶段,蒸发面进入材料内部后,表面处由于脱离了湿区,温度明显升高,使环境传向材料表面的热流密度减小,从而由表面到移动界面的导热热流密度减小,进而使界面上的蒸发率逐渐减小。在材料内部界面蒸发时,每一层的蒸发率都有一个上升过程,这是因为界面上的温度有一个上升的过程。

体积蒸发是指材料内部液相水的就地蒸发,图 6-27 中三条曲线分别代表材料底部、中部及表面处体积蒸发率。在  $W\geq W_{\text{fsp}}$  区域内,也存在就地蒸发现象,但就

对含水率的影响而言,它比液相水的扩散要小得多,因此,在本节物理模型中予以忽略。反映在图 6-27 中在加热第一、二阶段,三条曲线合并并在 $\dot{m}_v=0$ 的水平线上。在 $W < W_{fsp}$ 区域内,自由水不再存在,吸着水的扩散能力较弱,水分的迁移部分地借助于水蒸气的扩散来实现。由此,体积蒸发率就明显地变化。从图 6-27 中看到,当加热进入第三阶段( $7.8 \text{ h} < \tau < 22.6 \text{ h}$ )后,材料表层的含水率降至纤维饱和点以下, $W = W_{fsp}$ 的交界面由表面向内部移动,表层单元( $j = JZ$ )的水蒸气向环境的扩散由表层的体积蒸发来承担,因此,表层单元的体积蒸发率骤然地升高,而后,随 $W = W_{fsp}$ 界面向内部迁移的过程中,对表层单元而言,一方面,有水蒸气向环境扩散而损失,另一方面,又有水蒸气由内部扩散到表层单元而获得,在一失一得过程中,体积蒸发率随时间发生着变化。对材料内处于中部单元(例如, $j = 5$ )而言,在第三阶段的某一时刻( $\tau = 18.28 \text{ h}$ ),由湿( $W \geq W_{fsp}$ )变干( $W < W_{fsp}$ ),体积蒸发率骤然升高,其升高的高度远低于当初表层体积蒸发率升高的高度,而随后的变化也在水蒸气的得失中平衡。当加热第三阶段结束后,材料内没有自由水,只有吸着水的迁移,吸着水的蒸发(甚至可能凝结)充实着整个材料,对于材料的底部,当它由湿变干后,周围被水蒸气包围,这些水蒸气可能向材料底部扩散,使底部处体积蒸发率变为很小的负值(微量水蒸气的凝结),这一事实在图 6-27 中表现为在 $\tau > 26.62 \text{ h}$ 后仍有一段 $\dot{m}_{v,j=1} = 0$ 的时间。在加热第四阶段,随着水蒸气不断向环境扩散,底部的体积蒸发率不断上升,而其余部分的体积蒸发率在不断地减小。在更长的时间范围内,材料内的体积蒸发率都会不断减小直至 0。

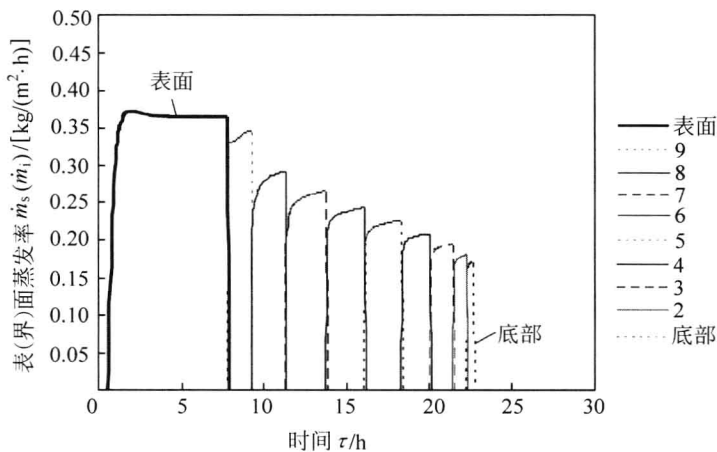


图 6-26 表(界)面蒸发率随时间变化

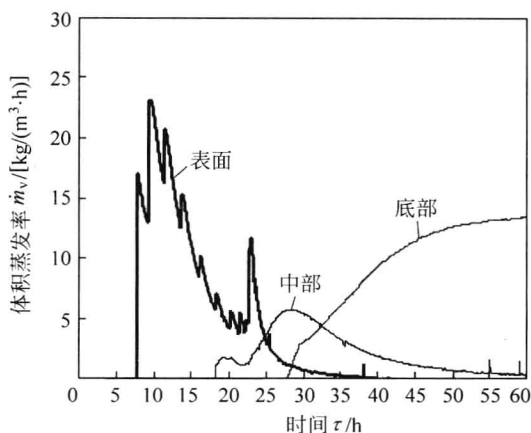


图 6-27 体积蒸发率随时间变化

#### 6.3.4.4 关于水蒸气密度与相对湿度

如物理模型中假定 2 与假定 4 所述,无论材料处于初始状态还是随后的受热干燥过程,材料内的水蒸气密度与其对应的液相水始终处于相平衡状态。在初始状态下,材料内水蒸气密度为初始温度下的饱和水蒸气密度,材料内湿空气的相对湿度为 1(见图 6-28)。在加热过程的第一与第二阶段( $0 \text{ h} < \tau < 7.8 \text{ h}$ ),材料内各处  $W > W_{\text{fsp}}$ ,液相水与气相水蒸气始终处于相平衡状态,水蒸气密度唯一取决于当地温度。因此,图 6-29 中水蒸气密度的曲线与图 6-20 中温度曲线相似,在图 6-30 中,水蒸气密度在材料内的分布犹如图 6-21 的温度分布曲线,由  $\tau = 0$  的水平线到  $\tau = 0.1 \text{ h}$  的弯曲线,再到  $1 \text{ h} < \tau < 7.8 \text{ h}$  的水平线。在第二阶段中,这条水平线原地不动,不随时间变化。材料内湿空气的相对湿度在加热过程的第一与第二阶段始终为 1(见图 6-28)。

进入加热第三阶段,  $W_{\text{JZ}} < W_{\text{fsp}}$ ,材料中的一部分由湿区而变成干区,其中的水蒸气将由饱和状态而转变成未饱和状态。在边界单元( $j = \text{JZ}$ )刚成为干区时,温度迅速上升,而含水率及相应地湿空气相对湿度恰缓慢下降,水蒸气密度有一个短暂的上升过程,而后随含水率下降,相对湿度下降,水蒸气密度也下降。水蒸气密度在图 6-29 中表现为从第二阶段彼此重合的曲线到第三阶段变成彼此分散的曲线,在图 6-30 中表现为从一条水平线而变成弯曲线。这条弯曲线由两部分组成,一部分,在  $W \geq W_{\text{fsp}}$  湿区域,水蒸气密度仍处于饱和状态,相对湿度仍为 1,水蒸气密度  $\rho_v$  表现为水平线向上平移;另一部分,在  $W < W_{\text{fsp}}$  区域,水蒸气密度不再处于饱和状态,其饱和程度,即相对湿度由当地的含水率与温度决定。水蒸气密度

$\rho_v$  的分布曲线在  $W < W_{fsp}$  区域内出现极大值, 图 6-30 中  $\tau = 15$  h 与  $\tau = 20$  h 的曲线显示了这一极大值的存在。这样, 在第三阶段中, 材料内湿空气的相对湿度在湿区域保持 1,  $\varphi = 1$ , 而干区域小于 1,  $\varphi < 1$ 。

在加热第四阶段( $\tau > 22.6$  h), 整个材料都处于  $W < W_{fsp}$  状态。进了第四阶段后, 材料温度迅速上升, 尽管相对湿度小于 1 (见图 6-28), 水蒸气密度还是迅速上升 (见图 6-29), 之后, 相对湿度不断下降, 而水蒸气密度在持续上升一段时间后开始下降。第四阶段中, 水蒸气密度分布则是单调地由材料底部至材料表面下降, 表示水蒸气由内部向表面扩散, 直至外部环境。这条分布曲线在进入第四阶段后, 先有一段短时间向上移动, 到达最大值后就向下移动, 且曲线趋于平坦 (见图 6-30 中对应于  $\tau = 30$  h、 $\tau = 40$  h、 $\tau = 50$  h 与  $\tau = 60$  h 的曲线)。

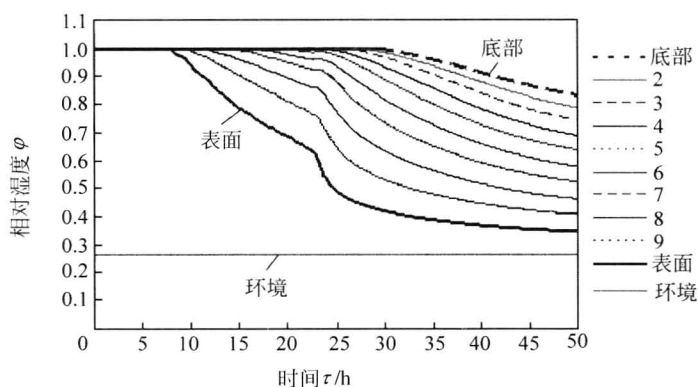


图 6-28 材料内湿空气相对湿度随时间变化

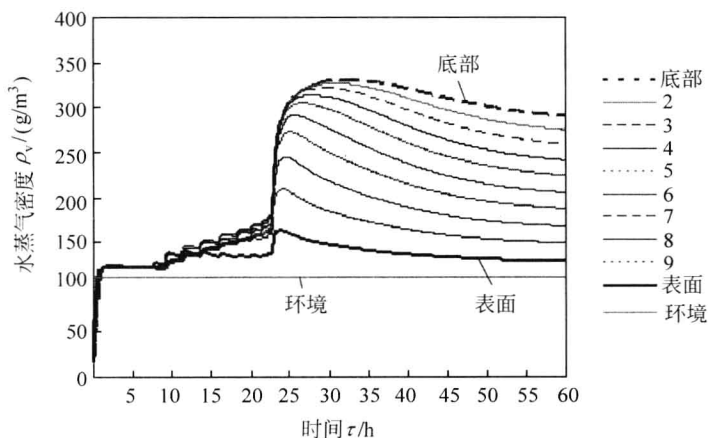


图 6-29 材料内水蒸气密度随时间变化

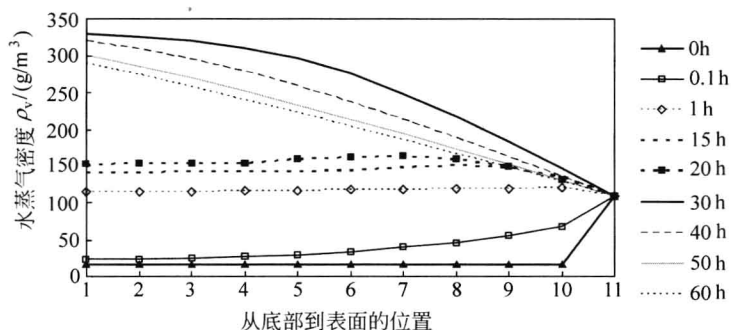


图 6-30 不同时刻材料内水蒸气密度的分布

关于水蒸气压力变化的规律与水蒸气密度十分相近,这里就不再示图说明。

## 习 题

- 6-1 图 6-31 是环境相对湿度  $\varphi$  与毛细管内液相水位置相对应的示意图。显然,毛细管内液相水位置与毛细管直径相对应,也与由毛细管组成的多孔材料含水率相对应。在环境温度为  $20^{\circ}\text{C}$ 、环境湿空气相对湿度  $\varphi=0.34$  条件下,毛细管内液相水停留在毛细管半径  $r=1\text{ nm}$  处(见表 5-3)。若环境温度升至  $40^{\circ}\text{C}$ ,湿空气相对湿度保持不变,试问毛细管内液相水将停留在多大直径位置上? 这个结果将意味着含水率增加还是减少?

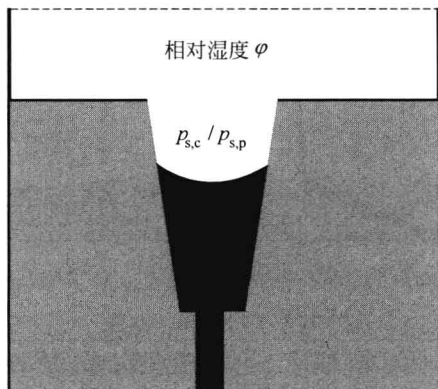


图 6-31

- 6-2 一块含水多孔材料在高温湿空气对流加热条件下,材料整体温度将上升,材料内每一点总体来说也都上升。但在一定条件下,材料的整体或者材料内某些局部,在温度上升过程中可能出现短暂的或持续一段时间的下降,看图 6-20 温度曲线及表 6-4 中温度数据。试分析温度下降的原因。
- 6-3 试根据质量守恒原则应用容积控制法写出从式(6-3-18)到式(6-3-26)的推导过程。
- 6-4 试根据能量守恒原则应用容积控制法写出从式(6-3-22)到式(6-3-40)的推导过程。
- 6-5 试讨论包围含水多孔材料环境湿空气的相对湿度  $\varphi_e$  与多孔材料内湿空气相对湿度  $\varphi(x, y, z, \tau)$  两者在概念与表述方面有何共同点与差异? 两者之间有何联系?
- 6-6 试对比干空气质量守恒方程式(6-2-7)与水蒸气质量守恒方程式(6-2-8),它们之间有何共同点,有何不同点? 为什么在建立物理-数学模型时可忽略式(6-2-7)而不能忽略式(6-2-8)?
- 6-7 图 6-32(a)中所示为一固-固相复合材料平板,其中连通相是一种低熔点材料。当材料的上表面与一块温度高于低熔点的热板相接触后,从上表面开始,复合材料中的低熔点材料开始熔化,逐渐地在平板内形成两个区域,两个区域之间有一温度等于低熔点材料的熔点的交界面,如图 6-32(b)所示。试写出为求此交界面的移动速度必须建立的控制方程与定解条件。



(a) 固-固相复合材料



(b) 固-液相多孔材料

图 6-32

## 参 考 文 献

- [1] 傅献彩,沈文霞等. 物理化学(下册)[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] 印永嘉,奚正楷,张树永. 物理化学简明教程[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [3] 黄华存,张小平. 活性炭纤维吸附甲苯废气等温吸附线方程的研究[J]. 环境污染治理技术与设备, 2006, 7(4): 56-59.

- [4] TEMPLE S J. Equilibrium moisture content of tea[J]. J. agric. Engng Res. ,1999,74: 83-89.
- [5] SPALT H A. The fundamentals of water vapor sorption by wood[J]. Forest Prod. J., 1958,8: 288-295.
- [6] SIMPSON W T. Predicting equilibrium moisture content of wood by mathematical models [J]. Wood Science,1973,5(1):41-49.
- [7] SIMPSON W T. Equilibrium moisture content of wood in outdoor locations in the United States and worldwide [R]. Research Note FPL-RN-0628, USDA Forest Products Laboratory. Madison,WI. 1998.
- [8] 徐有明. 木材学. 北京: 中国林业出版社,2006.
- [9] 程万里. 木材高温高压蒸气干燥工艺学原理. 北京: 科学出版社,2007.
- [10] 成俊卿. 木材学. 北京: 中国林业出版社,1985.
- [11] 王喜明. 木材干燥学. 北京: 中国林业出版社,2007.
- [12] LUIKOV A V. Heat and mass transfer in capillary-porous bodies [M]. Oxford: Pergamon Press, 1966.
- [13] SKAAR C. Water in wood. New York: Syracuse University Press,1972
- [14] HAILWOOD A J,HORROBIN S. Absorption of water by polymers; analysis in term of a simple model[R]. Trans. Faraday Soc. , 1964,42(B): 84-92,94-102.
- [15] TOEI R. Theoretical fundamentals of drying operation[J]. Drying Technology , 1996,14(1): 1-194.
- [16] KRUPINSK A B,STROMMEN I. Modeling of sorption isotherms of various kinds of wood at different temperature conditions[J]. Drying Technology, 2007, 25: 1464-1470.
- [17] Avramidis S. Evaluation of “three variable” models for the prediction of equilibrium moisture content in wood. Wood Sci. Technol. ,1989,23:251-258.
- [18] 曹崇文,朱文学. 农产品干燥工艺过程的计算机模拟. 北京: 中国农业出版社,2001.



# 后 记 1

把隐藏在书中但未言明或言尽的话,作为“编者的话”与读者交流与商讨。

## (一) 基础知识与逻辑过程贯穿于全书始终

作者在自己学习与工作期间以及编写此书的过程中,一直告诫自己要奉行一个宗旨。这个宗旨是,要重视基础知识及其应用。它的重要性体现在基本知识的运用对解决复杂工程问题,尤其是完成人们尚不熟悉的各类新型的科研课题方面起着重要而不可取代的作用。

在正确运用基础知识过程中有两个要点:一是注意基本物理量与基本规律的概念以及对高等数学教程(高等学校工科院系本科教学内容)的基本内容的正确理解与牢固掌握;二是清晰的逻辑过程。知识与逻辑两者相比,逻辑尤为重要。一台功能齐全的计算机其实最基本的能力只是用“开”与“关”的电路对“0”与“1”进行识别,此后,经历各式各样的逻辑过程可完成各种复杂计算及显示丰富多彩的仿真功能。用代数方程(差分方程)去近似(替代)微分方程;用“数值计算”代替“解析方法”,将原本很难(甚至无法求解)的数学问题变成了很繁(可以求解)的问题,繁琐的计算机程序正是简单的数学加上严密的逻辑过程。本书最后一节,6.3节,“吸湿性多孔材料干燥原理及数值分析”,是全书前五章及6.1节与6.2节所含知识的累积与逻辑过程的延伸。

每一个人的知识都是他个人在掌握的基本知识基础上通过一定逻辑过程编织起来的。个人自学能力的强弱集中反映在逻辑思维能力的强弱。要想提高自学能力就应该提高逻辑思维能力。笔者希望本书能成为一个例子,告诉读者,在解决复杂工程与科研课题时如何应用基础知识。也就是,让基础知识在正确的逻辑过程中发挥作用。

## (二) “简化”、“近似”与“捷径”渗透在本书首末

如果说,坚实的基础知识与严密的逻辑性有助于我们准确而清晰地去认识发生在多孔材料内复杂的传热传质过程,那么,另一方面,又由于客观事物的复杂性与多变性,善于运用合理的简化,恰当的近似及寻求解决问题的捷径是学习与工作

中应特别注意的,也是读者学好本书需特别注意的。应该说,领会与掌握建立不同类型问题的物理模型是学习的重点。物理与数学相比,物理更重要。以“传热学”中单层平壁一维稳态导热为例,这个简单的传热问题中隐含着一个丰富的物理模型。首先,把客观上三维的物体简化为一维,使导热现象发生在长度一定的一段线段内;再则,把材料导热系数依赖于温度这一事实近似为导热系数为常数;又再则,把绝大多数固体材料不同程度含有孔隙与水分予以忽略。在这样的条件下,数学上就可找到解决问题的捷径,把导热偏微分方程表示为最简单的二阶常微分方程( $d^2t/dx^2=0$ )。又如,集总参数法的引入,把三维物体简化为一个点(零维),导热系数视为无穷大。可以说,在传热学的历史上,这种忽略物体内部导热过程的情形显然是背离实际的。然而,集总参数这一概念的引入,这种看来似乎完全脱离实际的简化物理模型,直接导致在对实际问题的数学处理上可找到捷径,导热偏微分方程简化为常微分方程( $dt/d\tau=at+b$ )。这种简化模型预测的结果在一定条件下还是可信的。本书中介绍的发生在液相水表面上传热与传质过程的耦合;把发生在多孔材料内水分迁移简化为毛细管间渗流,进而近似为含水率的扩散;对发生在多孔材料内部液相水与水蒸气移动交界面的处理等都渗透着简化、近似与捷径。笔者希望本书能成为一个例子,告诉读者,在解决复杂工程与科研课题时如何应用“简化”、“近似”与“捷径”,对复杂传热传质现象给予预测。

最后,作者经常提醒自己,在合理简化、恰当近似条件下寻求解决问题捷径的过程一定要与那种囫圇吞枣式地搬用现存数学公式与现存计算机软件的工作方法相区分。名人的那句名言依然光辉,愿与读者共享:“在科学上没有平坦的大道,只有不畏艰险沿着陡峭山路攀登的人,才有希望达到光辉的顶点。”

作者

## 后 记 2

本书出版之际,正值清华大学百年华诞。作者愿以此书作为对母校生日的献礼。

本书出版之时正是作者自母校本科毕业后健康地工作 50 周年。此书也是作者近 50 年工作的一份总结。这份总结不仅凝结着作者的劳动,同时积淀着曾经的老师和以往的同事以及帮助与支持作者的各位同仁的辛勤付出。

首先,作者衷心感谢在大学期间(1955—1984)各位老师、同学以及长期工作在一起的工程力学系热物理教研室同事的帮助,感谢当年的老师与同事过增元教授为本书作“序”。特别感谢王补宣老师在作者求学期间及日后工作几十年中给予的悉心指导与热情支持。本书是作者在母校工作期间编著并出版的《热传导及其数值分析》的延续与扩充。《热传导及其数值分析》与作者主译的《热传导》的出版在 20 世纪 80 年代初期我国开始大规模招收研究生急需教学用书的形势下起了一定的作用。

同时,作者衷心感谢在北京科技大学工作(1984—2000)及退休后同事们给予的帮助。工作期间,作者在传热学教学中更自觉更系统地引入数值计算方法、主持完成了以传热传质数值分析为核心内容的 3 项国家自然科学基金课题的研究工作,还获得一项省级科技进步一等奖。教学与科研工作的历练为本书提供了充实的内容。退休之后,北京科技大学继续支持作者完成本书的编写,夏德宏教授与在读硕士研究生杜争编写了关于分形理论及预测等效导热系数的内容,研究生刘天力协助笔者完成书中部分插图的绘制。

作者特别珍惜在国外的 20 余年工作经历,它为本书的完成起了决定性作用。

在 1989—1999 年的 11 年间,作者应邀作为客座教授在加拿大 New Brunswick 省立大学(UNB)机械工程系及消防科学研究所(Fire Science Centre)工作,参与该研究所多项课题的研究。与研究所主任 J. E. S. Venart 教授合作完成了“液化气容器在火焰环境下热响应的数值仿真”等科研课题,充分体现了应用传热传质学基础知识,借助数值计算方法,描述与求解复杂工程问题的可能性,同时,积累了数值计算中很多技巧。编写复杂问题数学模型及应用计算技巧成为本书的重要组成部分。与此同时,与武汉理工大学肖金生教授合作完成了“液化气容

器在火焰环境下热响应”复杂过程数值仿真的动画界面。在此,向 Venart 教授、肖金生教授与 UNB 的同事们表示衷心的感谢。

在 2000—2010 的 11 年间,作者应邀以客座教授身份在加拿大温哥华林业研究机构 FPInnovations-Forintek 复合材料研究室工作,与研究室主任 Chunping Dai 博士及同事们合作完成了有关木材人造板加工及力学性能预测计算机仿真多项科研课题,包括与 Brad Wang 博士合作完成多项服务于用户的友好界面。同时,与 Forintek 魁北克复合材料研究室 James Deng 博士合作完成了“人造板 MDF 板坯在连续式热压机工作条件下传热传质过程数值模拟”。在完成这些科研课题中,作者对木材科学有了了解,认识到传热传质学在木材乃至各类多孔材料加工中的重要作用。正是基于这种认识,得以着手编写以木材为工程背景之一的本书。在此,对 Forintek 给予作者的支持,对 Chunping Dai 博士、James Deng 博士、Brad Wang 博士及同事们给予的支持与帮助表示诚挚的感谢。

此书的出版还得到时任南京林业大学木工学院院长周定国教授的热情支持。在本书编写过程中,曾在北京科技大学、南京林业大学、武汉理工大学、清华大学、福建农林大学等多所高等学校与科研单位多次讲解其中部分内容,得到了师生们热情的响应并倾听到诸多改进的建议。其中,南京林业大学顾炼百教授就书稿多处内容提出宝贵改进意见,尤其是将英文 adsorption isotherm 译为等温吸附线等合理的建议已被接纳并反映在本书中;北京林业大学张璧光教授指出,本书中关于木材干燥的实例与实际工程中的条件尚有很多差别,关于对木材结构的认识尚有提高的空间,这些中肯的建议为本书的科学性与实用性作了一定的界定;东北林业大学在读硕士研究生周桥芳同学与作者多次讨论关于环境条件与材料平衡含水率的关系等问题,为充实本书内容,提高对基本概念的认识起了很好的示范作用。在此,对上述提及的以及恕作者疏漏未曾提及到的单位、老师与同学们表达由衷的感激。

在此书出版之际深感遗憾的是,限于篇幅,未能将有些内容写入书中。例如,颗粒状多孔材料(如谷物、食品等散料)在堆放条件(固定床)及气流条件下的传热与传质;又如,数值计算中的计算原程序及友好界面,凡此种种。作者希望今后有机会完成续篇,或另编新书出版。

作 者